Devoir 01

AI 2013-2014

Le 20 septembre 2013

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.
On note $GL(E)$ le groupe (pour la composition des applications) des automorphismes de E et $SL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E de déterminant $+1$.
Id_E désigne l'application identité de E. On appelle involution de E un automorphisme u de E tel que $u \circ u = Id_E$.
E^* désigne le dual de E.
On appelle transvection de E un automorphisme t de E différent de Id_E possédant les deux propriétés suivantes :

(1) Il existe un hyperplan H de E tel que $\forall x \in H,\ t(x) = x$,

(2) $\forall x \in E$, $t(x) - x \in H$.

Partie I

1. Montrer que $SL(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.
2. Montrer qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan de E si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle $\phi \in E^*$ telle que H soit le noyau de ϕ. (On dira que ϕ définit l'hyperplan H).

   Ce résultat est-il encore vrai en dimension infinie ?

   Que peut-on dire de deux formes linéaires définissant le même hyperplan ?
3. Montrer que si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E :
$$dim(F_1) + dim(F_2) = dim(F_1 + F_2) + dim(F_1 \cap F_2).$$
4. Soit t une transvection de E.
   (a) On se propose de démontrer ici que l'hyperplan H appraissant dans la définition de t est unique (on l'appellera alors hyperplan de la transvection).
   Pour cela, on suppose qu'il existe deux hyperplans distincts H_1 et H_2, vérifiant (1) pour la tranvection t. Que peut-on dire de $H_1 + H_2$? Conclure.
   (b) Prouver qu'il existe une droite vectorielle unique D contenue dans H telle que
$$(3) \qquad \forall x \in E, \quad t(x) - x \in D,$$
   D est appelée droite de la transvection t.
   (c) Si ϕ est une forme linéaire définissant H, trouver un vecteur a de E tel que
$$(4) \qquad \forall x \in E, \quad t(x) = x + \phi(x).a.$$

(d) Réciproquement, montrer que si ϕ est une forme linéaire non nulle sur E, et a un vecteur non nul du noyau de ϕ, l'application t :

$$x \longmapsto x + \phi(x).a$$

est une transvection de E dont on déterminera l'hyperplan et la droite.

5. Montrer que les transvections d'hyperplan H donné constituent, avec l'identité de E, un groupe $T(H)$ pour la composition des applications, isomorphe au groupe additif de H.

6. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que deux transvections commutent. En déduire que $GL(E)$ n'est pas commutatif.

Partie II

1. Soit u une involution de E.

   (a) Que peut-on dire des valeurs propres de u ?

   (b) u est-elle diagonalisable ?

   On appelle involution minimale, une involution dont le sous-espace propre relatif à la valeur propre $+1$ est de dimension 1.

   (c) Montrer que si u est une involution minimale, on peut trouver une forme linéaire non nulle θ et un vecteur a tels que :

   $$(5) \qquad \forall x \in E \quad u(x) = -x + \theta(x).a.$$

   (d) Montrer qu'une transvection est la composée de deux involutions minimales ayant un sous-espace propre en commun.

2. Déduire de II.1 le déterminant d'une transvection.

3. Soit t une transvection de E et σ un automorphisme de E. Montrer que $\sigma \circ t \circ \sigma^{-1}$ est une transvection de E. Déterminer son hyperplan et sa droite. Prouver que si t et t' sont deux transvections de E, il existe un automorphisme σ de E tel que :

   $$t' = \sigma \circ t \circ \sigma^{-1}.$$

   Montrer que si $n \geq 3$, on peut choisir σ dans $SL(E)$.

4. E étant rapporté à une base $\beta = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, on désigne par I_n la matrice identité d'ordre n et, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, par E_{ij} la matrice carrée d'ordre n ayant tous ses éléments nuls sauf celui situé sur la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne qui vaut 1.

   (a) Montrer que si $i \neq j$, $B_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ est la matrice, dans la base β, d'une transvection de E. Déterminer son hyperplan et sa droite.

   (b) Si M est une matrice carrée d'ordre n, expliquer comment la matrice produit $B_{ij}(\lambda).M$ se déduit de la matrice M.

5. Soit M une matrice carrée d'ordre n inversible. Montrer qu'il existe une matrice B, produit de matrice $B_{ij}(\lambda)$, $(i \neq j)$ telle que le produit $B.M$ soit une matrice triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont tous égaux à 1 sauf celui situé sur la dernière ligne et la dernière colonne, dont on donnera la valeur.

6. Déduire de ce qui précède que les transvections engendrent le groupe $SL(E)$.

7. Déterminer les éléments de $SL(E)$ qui commutent avec les transvections. En déduire le centre Z de $SL(E)$ (ensemble des éléments de $SL(E)$ qui commutent avec tous les éléments de $SL(E)$). Montrer que Z est un groupe cyclique.