1) Limite de $(x,y) \mapsto \dfrac{\sin(x)^2+\sin(y)^2}{\mathrm{sh}(x)^2+\mathrm{sh}(y)^2}$ en $(0,0)$

---

2) Limite de $(x,y) \mapsto \dfrac{x^\alpha y^\beta}{y-x^2}$ en $(0,0)$, en discutant selon α et β

---

3) Limite de $(x,y,z) \mapsto \dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(2,-2,0)$

---

4) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Etudier la continuité de :

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \end{array}$$

---

5) Montrer que $\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+||x||^2} \end{array}$ est continue sur E, et montrer que $f(E)$ est bornée.

---

6) $(x,y,z,t) \mapsto \dfrac{x^3+y^3-z^3-t^3}{x^2+y^2-z^2-t^2}$ est-elle prolongeable par continuité en $(0,0,0,0)$, on précisera le domaine de définition.

---

7) On pose

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

pour x,y réels non tous deux nuls.
La fonction f admet-elle un prolongement continue à $\mathbb{R}^2$? un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$? $\mathcal{C}^2$?

---

8) Soit :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2-\{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y & \longmapsto & f(x,y)=(x^2-y^2)\ln(x^2+y^2) \end{array}$$

a) Est-il possible de prolonger f par continuité en $(0,0)$?
b) Etablir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ et, sans calculs, établir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

c) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

---

9) Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2)-f(0)}{x^2+y^2}$$

a) Déterminer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$. On prolonge F par continuité en $(0,0)$ et on suppose de surcroît f de classe $\mathcal{C}^2$.
b) Justifier que F est différentiable en $(0,0)$ et y préciser sa différentielle.
c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

---

10) Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} & \longrightarrow & R \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} \end{array}$.
Montrer que f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, mais que celle-ci n'est pas $\mathcal{C}^2$

---

11) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

a) Montrer que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

b) Etablir la réciproque.

---

12) Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

et $g(r, t) = f(r\cos t, r\sin t)$.
a) Trouver une relation liant

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

b) Montrer que

$$\varphi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $(r\varphi'(r))' = 0$
c) Conclure que φ est constante.

---

13) Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^y (x - t)\varphi(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.

---

14) I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.
$g : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$.
On pose $\begin{array}{rccl} G : & I^2 \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & \displaystyle\int_x^y g(t, z)\mathrm{d}t \end{array}$

1) Montrer que G est $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.
2) Pour $u : J \longrightarrow I$ et $v : J \longrightarrow I$ fonctions $\mathcal{C}^1$,
on pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} g(t, x)\mathrm{d}t$.
Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ et exprimer f'