Algèbre Linéaire

1 Espaces Vectoriels

1.1 Généralités

Dans toute la suite K désigne un corps.

Définition 1.1

Un K-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, tels que E soit un ensemble, $+$ soit une loi de composition interne sur E (une application de $E \times E$ dans E), et . un loi externe (une application de $K \times E$ dans E), tels que :

1. *$(E, +)$ soit un groupe abélien,*
2. *$\forall (x, y) \in E^2$, $\forall (\alpha, \beta) \in K^2$,*
   (a) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$
   (b) $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$
   (c) $\alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$
   (d) $1.x = x$.

Si on peut de plus munir E d'une deuxième loi de composition interne qui lui confère une structure d'anneau, avec la propriété :

$$\alpha.(xy) = (\alpha.x)y = x(\alpha.y),$$

on dit alors que ce quadruplet est une K-algèbre.

Définition 1.2

Une partie F d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, s'il est un espace vectoriel pour les mêmes lois, et le même corps.

En fait, on ne se sert jamais de ces définitions, mais de la caractérisation suivante, en utilisant des espaces vectoriels de référence :

Théorème 1.1

Soit $(E, +, .)$ un K-espace vectoriel, et $F \subset E$.
F est un sous-espace vectoriel si et seulement si

1. *il est non vide,*
2. *il est stable par $+$*
3. *il est stable par $.$*

Proposition 1.2

L'intersection de sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

1.2 Sous-espace vectoriel engendré

Comme en théorie des ensembles, on va parler de famille (grosso modo, une suite d'éléments indexée). Rappelons qu'une famille presque-nulle est une famille dont tous les éléments sont nuls sauf un nombre fini. Gardons en mémoire cependant que dans l'immense majorité des cas, les familles dont on parle sont finies (I de cardinal fini) et que, donc, elles sont automatiquement presque-nulles.

Définition 1.3

On appelle sous-espace vectoriel engendré par une partie F de E le plus petit sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) qui contient F.

Définition 1.4

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. $x \in E$ est une combinaison linéaire de cette famille s'il existe $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille presque-nulle de scalaire de K telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.

Théorème 1.3

Le sous-espace vectoriel engendré par F est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de F.

Dans le cas où l'on considère le sous-espace vectoriel engendré par deux sous-espaces vectoriels, on l'appelle la somme de ces deux sous-espaces vectoriels. Et cette notion se prolonge à un nombre fini d'espace vectoriel.
Il faut noter que la notion de réunion n'a aucun intérêt pour les sous-espaces vectoriels.

Définition 1.5

Si de plus tout élément de la somme s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'un élément de chacun des sous-espaces vectoriels $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, on dit que cette somme est directe, et on la note $\oplus_{i\in[\![1,n]\!]}E_i$.

Si $n = 2$, il faut et il suffit que l'intersection des deux sous-espaces vectoriels soit le sous-espace nul. Dans le cas d'un entier plus grand, une CNS est que le vecteur nul se décompose de manière unique. Cela devrait vous rappeler la condition de continuité d'une application linéaire.

Définition 1.6

Une partie F de E est dite génératrice si elle engendre E.

Définition 1.7

On considère une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E. cette famille est libre si pour toute famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaire presque-nulle telle que $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0$ alors, la famille de scalaire est la famille nulle.

Rappelons qu'une famille presque-nulle est une famille pour laquelle tous les termes sont nuls, sauf un nombre fini. C'est à dire que si I est fini, toutes les familles sont presque-nulles.

Définition 1.8

On apelle base de l'espace vectoriel E toute famille génératrice et libre.

En fait, si cette famille est infinie, on parlera plutôt de partie basique.

Définition 1.9

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème 1.4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors

1. *il admet une base,*
2. *toutes les bases ont le même nombre d'éléments n. n est la dimension de l'espace vectoriel E.*
3. *toutes les familles génératrices ont au moins n éléments.*
4. *toutes les familles libres ont au plus n éléments.*
5. *toute famille génératrice à n éléments est une base.*
6. *toute famille libre à n éléments est une base.*
7. *de toute famille génératrice, on peut extraire une base.*
8. *(Théorème de la base incomplète) toute famille libre peut être complétée en une base de E.*

Attention, la dimension d'un espace vectoriel dépend directement du corps de référence. Par exemple, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, mais un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1.

Proposition 1.5

Si $E \subset F$, et que $dim(E) = dim(F)$, alors $E = F$.

Preuve de la Proposition 1.5:
Soit B une base de E, c'est une famille libre de F, qui possède le bon nombre d'éléments. C'est donc une base de F et tout élément de F s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de E.

$\blacksquare$

1.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition 1.10

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Un sous-espace G est dit un supplémentaire de F s'il est en somme directe avec F, et que leur somme est E.

Théorème 1.6

Tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire dans E (et même une infinité si ce n'est pas E ou $\{0_E\}$).

Proposition 1.7

En dimension finie, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a

$$dimF + G = dimF + dimG - dimF \cap G.$$

Pour obtenir une famille génératrice de la somme, il suffit de faire la réunion de familles génératrices de F et G. S'ils sont en somme directe, ce sera d'ailleurs une base !
Ce qui vient d'être dit s'applique pleinement à des supplémentaires.

Proposition 1.8

Une famille de sous-espaces vectoriels est en somme directe si et seulement si la dimension de leur somme est égale à la somme de leurs dimensions.

2 Applications linéaires

Définition 2.11

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, et f une application de E vers F.
f est dite linéaire, ou encore morphisme d'espaces vectoriels si $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall (\alpha, \beta) \in K^2$,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Un endomorphisme est un morphisme de E dans lui-même.
Un isomorphisme est un morphisme bijectif.
Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
Si F est K, on fit que c'est une forme linéaire.
On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F, et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des maorphismes de E. $GL(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E.

Remarquons que $f(0_E) = 0_F$.
L'acronyme GL veut dire Groupe Linéaire.
Enfin, l'application réciproque d'un isomorphisme est encore linéaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, E' et F' deux sous-espaces vectoriels de E et F, tels que $f(E') \subset F'$. Alors la restriction de f de E' sur F' est encore linéaire.

Proposition 2.9

La composée de deux applications linéaires (dès qu'elle a un sens) est une application linéaire.

Théorème 2.10

L'image d'un sous-espace vectoriel par un morphisme est un sous-espace vectoriel.
L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel par un morphisme est un sous-espace vectoriel.

Définition 2.12

On appelle noyau du morphisme l'image réciproque du sous-espace nul :

$$Ker f = \{x \in E, f(x) = 0_F\}.$$

On appelle Image de f l'image par f de E :

$$Im f = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

Ker provient de l'allemand Kern, qui veut dire noyau.

Définition 2.13

On dit qu'une application linéaire est de rang fini si $Im f$ est de dimension finie. Cet entier est appelé rang de f.

Théorème 2.11

Si E est de dimension finie, pour connaitre précisément une application linéaire, il faut et il suffit de connaitre les images des vecteurs de n'importe quelle base de E.

Preuve du Théorème 2.11:

le fait que cela soit nécessaire ne devrait pas être une grande surprise. Il faut montrer que cela est suffisant. Soit donc $B = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E. On notera $f(e_i)$ les images des vecteurs de cette base.
Soit $x \in E$. Alors, il existe $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de scalaires telle que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

En appliquant la linéarité de f, on obtient alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i).$$

■

En fait, on remarque qu'il suffit de connaitre les images d'une famille génératrice. Et on a

$$Imf = Vect\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}.$$

Théorème 2.12

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f est injective si et seulement si $Kerf = \{0_E\}$.

Preuve du Théorème 2.12:
Cela provient du fait que $f(x) = f(y)$ si et seulement si $f(x-y) = 0_F$.

■

Théorème 2.13

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Il existe un isomorphisme entre E et F si et seulement si ils ont même dimension.
De même si E ou F est de dimension finie, et qu'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre, alors l'autre est aussi de dimension finie, et par conséquent de même dimension.

On en déduit d'ailleurs que si E et F ont même dimension (dans le cas d'endomorphismes, par exemple), et que f envoie une base sur une base, alors c'est un isomorphisme.

Théorème 2.14 (du Rang)

$$dim(E) = rg(f) + dim(Kerf)$$

Preuve du Théorème 2.14:
On considère E' un supplèmentaire de $Kerf$, et g la restriction de f de E' sur Imf. Il suffit de montrer que g est un isomorphisme pour pouvoir conclure.

■

Les conséquences de ce théorème sont innombrables. La connaissance du noyau ou de l'image couplé à ce théorème suffit souvent pour conclure sur la bijectivité de f. Dans la cas particulier des endomorphismes, cela donne

Proposition 2.15

Soit f un endomorphisme de E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes

1. *f est bijective,*
2. *f est injective,*
3. *f est surjective.*

On munit $\mathcal{L}(E, F)$ de l'addition (rappel : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$), et de la multiplication par un scalaire ($(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$.)

Proposition 2.16

$(\mathcal{L}(E, F), +, .)$ est un K-espace vectoriel.

2.1 Exemples d'applications linéaires

2.1.1 Homothéties

Définition 2.14

On dit qu'un endomorphisme f de $\mathcal{L}(E)$ est une homothétie de rapport λ si $f = \lambda Id_E$.

Proposition 2.17

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est une homothétie si et seulement si $\forall x \in E$, $\{x, f(x)\}$ est une famille liée (i.e non libre).

Preuve de la Proposition 2.17:
L'implication directe est immédiate.
Pour la réciproque, on montre d'abord que cela revient, pour x non nul à l'existence d'un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
On fixe ensuite un x, et on montre que $\forall y \in E$, $\lambda_y = \lambda_x$.
Le cas y nul est immédiat. Le cas $y \in Vect\{x\}$ aussi.
On considère alors un $y \notin Vect\{x\}$. Puis on écrit $f(x+y)$ de deux manières différentes, et en résolvant le système (linéaire), on trouve que λ_{x+y} est à la fois égal à λ_x et à λ_y.
$\blacksquare$

2.1.2 Projections, Projecteurs

Définition 2.15

Soient F et G deux supplémentaires de E. Pour tout x de E, on notera x_F et x_G les deux uniques éléments de F et G tels que $x = x_F + x_G$.
On appelle projection sur F parallèlement à G *l'application* $p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{array}$.

Cette application est linéaire.

Définition 2.16

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur *si $p \circ p = p$.*

Théorème 2.18

Un projecteur p est la projection sur Imp parallèlement à $Kerp$.
En particulier, $E = Imp \oplus Kerp$. De plus, $y \in Imp \Longleftrightarrow y = p(y)$.
Enfin, la décomposition de x sur ces supplémentaires est la suivante : $x = p(x) + (x - p(x))$.

2.1.3 Symétrie

Définition 2.17

On reprend les notations de la section précèdente. On appelle symétrie *par rapport à F parallèlement à G l'application* $s : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F - x_G \end{array}$.

Théorème 2.19

Une symétrie est une application linéaire. Elle vérifie $s^2 = Id_E$, et si p est la projection sur F parallèlement à G, on a $s = 2p - Id_E$.

Proposition 2.20

On suppose que K n'est pas un corps de caractéristique 2.
$s \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $s \circ s = Id_E$.
Alors $p = \frac{1}{2}(s + Id_E)$ est un projecteur er s est la symétrie sur Imp parallèlement à $Kerp$.

3 Ecriture matricielle

3.1 Généralités

Définition 3.18

Soient p et q deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice à p lignes et q colonnes à coefficients dans K toute famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$ de scalaires. On la note :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Définition 3.19

On note $\mathcal{M}_{p,q}(K)$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans K.

Si $q = 1$, on dit que la matrice est une matrice colonne. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$

Si $p = 1$, on dit que c'est une matrice ligne.$(a_1 a_2 \dots a_q)$
Si $p = q$, on dit que c'est une matrice carrée d'ordre p. On note alors $\mathcal{M}_p(K)$ cet ensemble.

Remarque 1 *Quand il n'y a pas d'ambiguité possible, on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ et K^n.*

Définition 3.20

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$ une matrice. On appelle transposée de la matrice A, l'élément de $\mathcal{M}_{q,p}$, et on le note ${}^tA = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,p]\!]}$, avec $b_{i,j} = a_{j,i}$.

Définition 3.21

Dans le cas des matrices carrées,
Les $a_{i,i}$ sont appelés éléments diagonaux de la matrice.
La diagonale principale de la matrice est l'ensemble de ses éléments diagonaux.
Si $i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$, on dit que la matrice est triangulaire supérieure.
Si $i < j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$, on dit que la matrice est triangulaire inférieure.
Si $i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$, on dit que la matrice est diagonale.
Si pour tout (i,j), $a_{j,i} = a_{i,j}$, on dit que la matrice est symétrique. On a alors ${}^tA = A$.
Si pour tout (i,j), $a_{j,i} = -a_{i,j}$, on dit que la matrice est antisymétrique. On a alors ${}^tA = -A$. En particulier, les éléments diagonaux sont nuls.

On munit $\mathcal{M}_{p,q}(K)$ d'une loi de composition interne : l'addition (on additionne termes à termes). On le munit aussi d'une loi de composition externe : la multiplication par un scalaire.

Théorème 3.21

Muni de ces deux lois, l'ensemble des matrices p,q est un K-espace vectoriel de dimension finie pq.
La base canonique de cet espace vectoriel est composée des matrices élémentaires $E_{k,l}$. Celles ci sont composées de 0, sauf le terme de la k-ième ligne et de la l-ième colonne qui est 1.
Autrement dit si $E_{k,l} = ((a_{i,j})$, on a $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, $a_{i,j} = \delta_{i,k}\delta_{j,l}$, où δ est le symbole de Kronecker.

Définition 3.22

Soient $(p,q,r) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soient A un élément de $\mathcal{M}_{p,q}$ et B un élément de $\mathcal{M}_{q,r}$. On définit la matrice C produit des matrices A et B par $C \in \mathcal{M}_{p,r} = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,r]\!]}$, avec

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$$

Il est conseillé de bien faire attention aux tailles des différentes matrices.

Remarquons que cette opération sur les matrices est un loi de composition interne pour les matrices carrées. Elle admet même un élément neutre, la matrice diagonale composée de 1. On la notera I_n. On dira qu'une matrice est inversible si elle l'est pour la multiplication, et on notera $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles (oui, oui GL pour à nouveau Groupe Linéaire, ce n'est pas un hasard).

Proposition 3.22

$$E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$$

Preuve de la Proposition 3.22:
Pour des raisons de commodités d'écriture, on note $E_{i,j} = (a_{\alpha,\beta})$, et $E_{k,l} = (b_{\gamma,\zeta})$. Enfin on note le terme général du produit $c_{\mu,\nu}$.

$$\begin{aligned} c_{\mu,\nu} &= \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\mu,\alpha}b_{\alpha,\nu} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_{\mu,i}\delta_{\alpha,j}\delta_{\alpha,k}\delta_{\nu,l} \end{aligned}$$

Remarquons que si $j \neq k$, ce coefficient est toujours nul, et donc le produit est la matrice nulle. On suppose maintenant que $j = k$, alors la seule contribution non nulle de cette somme provient, éventuellement de $\alpha = j$. Et on a $c_{\mu,\nu} = \delta_{\mu,i}\delta\nu, l$. On reconnait le terme général de la matrice $E_{i,l}$. On retrouve bien le résultat annoncé.

■

On remarque que ce calcul marche même avec des matrices rectangulaires. D'ailleurs

Proposition 3.23

La transposition est une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(K)$. De plus, ${}^t(AB) = {}^tB.{}^tA$.

3.2 Lien avec les applications linéaires.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n, et $B = (e_i)$ une base de E. Remarquons qu'à tout vecteur $x \in E, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on peut associer de manière unique une matrice colonne $X = (x_{i,1})_{i\in[\![1,n]\!]}$, avec $x_{i,1} = x_i$. C'est la matrice des coordonnées du vecteur x dans la base B. **Cette matrice dépend de la base B.**

Théorème 3.24

> *B étant fixé, l'application qui à x associe la matrice de ses coordonnées est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Bien sur, on a la même chose avec des matrices lignes ou des matrices diagonales. Soient maintenant E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K de dimensions respectives p et q. Soit B une base de E, $B = (e_i)$, et B' une base de F, $B' = (f_j)$.
On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et on introduit les $a_{i,j}$ de la manière suivante : $\forall j \in [\![1, q]\!]$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$$

On note A la matrice des $a_{i,j}$: c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,q}$.

Théorème 3.25

> *Soit x un élément de E, et X la matrice-colonnes de ses coordonnées dans la base B. Alors AX est la matrice colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base B'.*

Preuve du Théorème 3.25:
Il suffit de l'écrire. La difficulté se trouve en fait dans les notations, et dans le fait que, i étant fixé, la matrice colonne $(a_{i,j})$ représente les coordonnées de $f(e_j)$.
Donc en fait, pour remplir la matrice A, on met dans la première colonne les coordonnées de $f(e_1)$, dans la deuxième colonne celles de $f(e_2)$, etc ...

■

Définition 3.23

> *On appelle A la matrice de f dans les base B et B'. On la note aussi $Mat(f, B, B')$.*

Théorème 3.26

> *Les bases B et B' étant fixées, l'application*
> $$\begin{array}{llll} \varphi : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q}(K) \\ & f & \longmapsto & Mat(f,B,B') \end{array}$$
> *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*
> *En particulier, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel de dimension pq.*

3.3 Matrices de passage, changements de base

3.3.1 Matrices rectangulaires

Le but ici est d'exprimer à travers l'écriture matricielle le calcul qui permet, connaissant les coordonnées d'un vecteur dans une base B de trouver les coordonnées du même vecteur dans une base B'.

Définition 3.24

On considère un espace vectoriel E de dimension n, $B = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $B' = (f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de B vers B' la matrice de l'application identité de B et B', : :

$$Mat(Id_E, B, B').$$

Elle est donc construite en mettant dans la j-ième colonne les coordonnées de f_j exprimées dans la base des (e_i). On remarque que l'on obtient la matrice identité si et seulement si $B' = B$.
Ici, il n'y a pas d'ambiguité sur le nom. Ce sont les conséquences qui, par contre prêtent à confusion :

Proposition 3.27

On appelle $P = Mat(Id_E, B, B')$. Soit u un vecteur de E, X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base B, et X' celle de ses coordonnées dans la base B'. Alors

$$X = PX'$$

Preuve de la Proposition 3.27:
Il suffit de l'écrire. En fait, l'ambiguité du nom de la matrice de passage se trouve dans cette proposition : comme il s'agit de la matrice de passage de B vers B', on a plutôt l'impression qu'en lui appliquant les coordonnes dans B, on obtient celle dans B'.
Pour lever cette ambiguité, le plus simple est de se rappeler comment on construit la matrice : la première colonne est composée des coordonnés de f_1 dans la base B. Quand on multiplie P par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient la première colonne. Or $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ représente les coordonnées de f_1 dans la base des (f_j).
C'est donc bien $X = PX'$.

■

Proposition 3.28

La matrice de pasage de B dans B' est l'inverse de la matrice de passage de B' dans B. C'est donc un élément de $GL_n(K)$.

Théorème 3.29

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p.
Soit B_0 et B_0' deux bases de E, et B_1 et B_1' deux bases de F.
On note P la matrice de passage de B_0 vers B_0', et Q celle de B_1 vers B_1'.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soient $A = Mat(f, B_0, B_1)$ et $B = Mat(f, B_0', B_1')$. Alors

$$B = Q^{-1}AP$$

Preuve de la Proposition 3.29:
La preuve n'est pas difficile, il suffit d'écrire les différentes équations matricielles données par le texte.
On introduit X et X' les coordonnées du vecteur x dans les bases B_0 et B_0'.
De même, on intriduit Y et Y' celle de $f(x)$ dans les bases B_1 et B_1'. On a alors $X = PX'$,
$Y = QY'$,
$Y = AX$,
et $Y' = BX'$.
En utilisant les trois premières équations, on trouve $QY' = APX'$, ou encore $Y' = Q^{-1}APX'$.
Il ne reste plus qu'à identifier avec la quatrième.

■

Définition 3.25

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ A et B sont équivalentes si elles représentent une même application linéaire dans des bases (éventuellement) différentes.
Ou, cela revient au même, s'ils existent $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_n(K)$ telles que $B = Q^{-1}AP$.

Proposition 3.30

La relation binaire "sont équivalentes" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

3.3.2 Cas des matrices carrées.

Soit f un endomorphisme de E. Un cas particulier important correspond à celui où la base B' est la base B. On note $Mat(f, B)$ la matrice de f dans la base B.

Proposition 3.31

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension n, B et B' deux bases de E, P la matrice de passage de B vers B'.
Soit f un endomorphisme de E, et A et B respectivement les matrices de f dans B et B'. Alors

$$B = P^{-1}AP.$$

C'est un cas particulier de la proposition (3.3.1).

Définition 3.26

Deux matrices A et B sont semblables s'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$.
Il est encore équivalent de dire qu'elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Proposition 3.32

La relation binaire "est semblable à" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(K)$.

Attention, ce n'est pas la même relation que la relation équivalente sur $\mathcal{M}_n(K)$. Par contre, on peut dire que deux matrices semblables sont équivalentes.
Exercice : Donner deux matrices équivalentes qui ne sont pas semblables, en anticipant éventuellement la suite du cours.

3.4 Rang d'une matrice

Définition 3.27

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On appelle rang de la matrice A la dimension de l'espace vectoriel (sous-espace vectoriel de K^n) engendré par ses matrices colonnes. On le notera $rg(A)$.

Proposition 3.33

Soit f une application dont A est la matrice dans les bases adéquates. Alors $rg(A) = rg(f)$.

On remarque que $rg(A)$ est nécessairement plus petit que n (dimension de l'espace dans lequel on travaille), et p, cardinal de la famille.
On remarque que, pour une matrice carrée, son rang est n équivaut à dire qu'elle est inversible.

Théorème 3.34 (Fondamental)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On note r son rang. Alors A est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix},$$

où $0_{q,s}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{q,s}(K)$.

On introduit ici la notion de blocs.

Théorème 3.35

Deux matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Attention, ce n'est pas vrai pour les matrices semblables.

Définition 3.28

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, et soient deux ensembles non vides $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$. La matrice $B = (a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est appelée <u>matrice extraite de A</u>, et A est appelée <u>matrice bordante de B</u>.

Théorème 3.36

Le rang d'une matrice est le plus grand ordre des matrices carrées inversibles extraites de A.

Corollaire 3.37

Le rang d'une matrice est le rang de sa transposée.

3.5 Trace d'un endomorphisme

On complétera cette partie dans la partie Dualité.

Définition 3.29

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$. On appelle Trace de A *le scalaire* $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Proposition 3.38

$$Tr : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(K) & \longrightarrow & K \\ A & \longmapsto & Tr(A) \end{array}$$ *est un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(K), K)$: c'est une forme linéaire.*

Proposition 3.39

Soient A et B deux matrices carrés d'ordre n. Alors

1. $Tr(AB) = Tr(BA)$,
2. $Tr({}^tA) = Tr(A)$,
3. *si A et B sont semblables,* $Tr(A) = Tr(B)$.

Remarquons donc que pour un endomorphisme f donné, toutes ses matrices ont la même trace.

Définition 3.30

Soit f un endomorphisme d'une espace vectoriel de dimension finie. On appelle trace de l'endomorphisme f *la trace de n'importe laquelle de ses matrices.*

exercice : soit p un projecteur, montrer que $rg(p) = Tr(p)$.