Parabole

AI 2012-2013

Exercice 1 :
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, et F un point n'appartenant pas à la droite.
On appelle parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$ l'ensemble $\mathcal{P}$ des points équidistants de F et de $\mathcal{D}$.
On note H le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$, $p = FH$ s'appelle le paramètre de la parabole.
Montrer que (FH) est un axe de symétrie de la parabole.
Montrer que (FH) recoupe $\mathcal{P}$ en un point que l'on notera S, appelé sommet de la parabole.
Construire point par point la parabole à la règle et au compas.

Exercice 2 :
Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, et F un point n'appartenant pas à la droite. Décrire l'ensemble des centres des cercles passant par F et tangents à $\mathcal{D}$.

Exercice 3 :
Soit un cercle (C) de centre O et de rayon R. On considère les cercles (ω) qui coupent (C) sous l'angle donné α et qui passent par un point fixe F tel que $OF = Rcos(\alpha)$. Montrer que les cercles (ω) sont tangents à une droite fixe et que leurs centres appartiennent à une parabole.

Exercice 4 :
On considère une droite fixe $\mathcal{D}$, et un point fixe K non situé sur $\mathcal{D}$. On note (P) toute parabole passant par K et admettant $\mathcal{D}$ pour directrice.

1. Montrer que l'ensemble des foyers F est un cercle (C), à l'exception d'un point H de ce cercle.
2. Déterminer le foyer F pour que la parabole (P) correspondante passe par un point donné M, distinct de K. Discuter suivant les positions de M dans le plan.

Exercice 5 :
On considère une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. Dans le repère orthonormé direct, d'origine S, et de premier vecteur $\dfrac{\overrightarrow{SF}}{\| \overrightarrow{SF} \|}$, donner l'équation cartésienne de cette parabole.
Cette équation sera appelée équation réduite de la parabole.
Réciproquement, montrer que tout ensemble dont l'équation cartésienne dans un repère orthonormée est de cette forme, est une parabole.

Exercice 6 :
Soit (P) une parabole, et $\mathcal{D}'$ une droite du plan. Etudier l'intersection de (P) et $\mathcal{D}'$.

Exercice 7 :
Soit une parabole (P) de foyer F et de directrice (D). Une sécante focale (Δ) variable coupe la parabole en M et M'. Montrer que le milieu J de $[MM']$ appartient à une parabole fixe.

Exercice 8 :
Montrer qu'en tout point d'une parabole, il existe une tangente.
Que peut-on dire de la tangente au sommet ?

Exercice 9 :
Soit (P) une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. Soit M un point de la parabole, et μ le projeté orthogonale de M sur la directrice.

1. Caractériser la tangente à la parabole en M par rapport à
   (a) F et μ
   (b) $\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{M\mu}$.
2. Déterminer le lieu géométrique des symétriques du foyer par rapport aux tangentes à la parabole.
3. Déterminer le lieu géométrique des projections du foyer sur les tangentes à la parabole.
4. Montrer que la portion de tangente comprise entre le point de contact et la directrice est vue du foyer sous un angle droit.
5. Soit m le projeté orthogonal de M sur l'axe de la parabole, et T et N les points de contact de la tangente et de la normale avec cet axe.

   Déterminer :
   (a) Le milieu de $[TN]$,
   (b) la longueur de la sous-normale $[mN]$,
   (c) le milieu de la sous-tangente $[Tm]$.

Exercice 10 :
Soit (P) une parabole, et (δ) une direction du plan.
Déterminer le nombre de tangente à la parabole de direction (δ).
Soit maintenant P un point du plan. Déterminer le nombre de tangentes à la parabole passant par P.

Exercice 11 :
On reprend l'étude géométrique d'une parabole et d'une droite donnée (L) non perpendiculaire à la directrice (D).
Soit M un point d'intersection de (L) et (P).
Que peut-on dire du cercle (C) centré en M passant par F par rapport à la directrice ? On notera μ le point d'intersection.
Montrer que ce cercle passe par le symétrique F' de F par rapport à (L).
Montrer que (FF') est sécante avec (D). On notera I son point d'intersection.
Exprimer la puissance de I par rapport à (C), et terminer l'étude.