Hyperbole

AI 2012-2013

Exercice 1 :
Soient F et F' deux points du plan et a un réel positif. On définit

$$(H) := \{M \in \mathcal{P} / |MF - MF'| = 2a\}.$$

A quelle condition, $(H) \neq \varnothing$?

Exercice 2 :
Avec les mêmes notations, on note $FF' = 2c$, et on suppose $a \in]0, c[$.
On appelle hyperbole de foyers F et F', et de paramètre a l'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$.

1. On note (Δ) la médiatrice de $[FF']$, $c := \frac{FF'}{2}$.

   Montrer que (FF') et (Δ) sont des axes de symétrie de (H).

   (FF') est appelé axe focal de l'hyperbole. Pour un point M de l'hyperbole, les segments $[MF]$ et $[MF']$ sont appelés les rayons vecteurs ou rayons focaux.

   Le point O, intersection de l'axe focal et de (Δ) est appelé le centre de l'hyperbole, et (Δ) l'axe non focal.

2. Trouver l'intersection de (H) avec ses axes, et placer les points le cas échéant par rapport aux foyers. On dira que ce sont les sommets de l'hyperbole.

   $2a$ est appelé l'axe transverse de l'hyperbole, et on parlera désormais d'hyperbole de foyers F et F' et d'axe transverse $2a$.

3. Remarquons que

$$|MF - MF'| = 2a \iff \left\{ \begin{array}{ll} MF - MF' = 2a & (1) \\ \quad ou & \\ MF' - MF = 2a & (2) \end{array} \right.$$

   Montrer que les points de (H) qui vérifient (1) sont situés dans le demi-plan de frontière Δ, contenant F, et que ceux qui vérifient (2) sont dans celui qui contient F'.

   On dira que l'hyperbole est constituée de deux nappes (ou branches) relatives à F et F'.

Exercice 3 :
On appelle cercles directeurs de l'hyperbole les deux cercles centrés sur les foyers et de rayon $2a$.
On va déterminer l'ensemble des centres des cercles tangents au cercle directeur de centre F' et passant par F :
soient deux points F et F' du plan, c tel que $FF' = 2c$, soit $a < c$, et (C) et (C') les deux cercles directeurs de l'hyperbole de foyers F et F' et d'axe transverse $2a$.

1. Soit m' un point de (C'). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la médiatrice de $[Fm']$ et $(F'm')$ soient parallèles.

   Dans le cas où elles ne sont pas parallèles, on note M le point d'intersection de ces deux droites. Que peut-on dire de M ? On notera que nécessairement, $m' \in [F'M]$.

2. On note (C_M) le cercle centré en M passant par F, et (C'_M) celui centré en M passant par F'.

   Montrer que (C_M) est tangent à (C') et que (C'_M) est tangent à (C). Distinguer les cas où les tangences sont intérieures ou extérieures.

3. Conclure

Exercice 4 :
Soit une hyperbole (H) de foyers F et F' et d'axe transverse $2a$.
On appelle intérieur de l'hyperbole l'ensemble des points M du plan qui vérifient $|MF-MF'| > 2a$, et l'extérieur de l'hyperbole l'ensemble des points M qui vérifient $|MF-MF'| < 2a$.
Tracer sur un dessin ces deux ensembles.

Exercice 5 :
On considère une hyperbole (H) variable, passant par deux point fixes A et B, dont l'un des foyers F est fixe.
Soit F' le deuxième foyer. Trouver l'ensemble des points F'.

Exercice 6 :
On donne un cercle fixe (C) de centre O, de rayon R, et un point A extérieur au cercle.
Trouver l'ensemble des centres M des cercles (ω) passant par A, coupant (C).

Exercice 7 :
Dans un repère correctement choisi, trouver une équation cartésienne de l'hyperbole.
Réciproquement, montrer que tout ensemble qui vérifie une équation de ce type est une hyperbole.
Comment se traduit dans cette équation le fait qu'un point soit à l'intérieur ou à l'extérieur de l'hyperbole ?

Exercice 8 :
On se place dans un repère pour lequel l'hyperbole (H) (respectivement l'ellipse (E)) admet une équation réduite.
Les foyers sont donc de coordoonnées $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$.
Soit $M(x,y)$ un point de (H) ou de (E), posant $r = |MF|$ et $r' = |MF'|$, montrer que

$$r = \left|a - \frac{cx}{a}\right| \text{ et } r' = \left|a + \frac{cx}{a}\right|.$$

Exercice 9 :
Soit, par rapport à 2 axes Ox et Oy, les points $A(a,0)$ et $A'(-a,0)$, a désignant une constante réeele strictement positive.
Soit (C) un cercle variable passant par A et A'. Soit (MM') le diamètre de (C) parallèle à (AA'). Trouver l'ensemble des points M et M'.

Exercice 10 On appelle hyperbole équilatère une hyperbole telle que $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Comment cela se traduit-il dans son équation réduite ?

Exercice 11 : Ligne de niveau
Soit, par rapport à un repère orthonormé xOy les points $A(a,0)$ et $A'(-a,0)$, a étant une longueur donnée.
Trouver l'ensemble des points M tels que $tan(x'x, AM)tan(x'x, A'M) = k$.

Exercice 12 :
Soit $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ et $g(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.
Tracer les graphes de f et g.
Que constatez vous ?
On appelera <u>asymptote de l'hyperbole</u> les droites d'équation $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ dans le repère lié à (H).
Que peut-on dire des asymptotes d'une hyperbole équilatère ? Peut-on définir une ou plusieurs asymptotes pour les paraboles ? Les ellipses ?

Exercice 13 :
Soit (H) une hyperbole, d'asymptote (OX) et (OY).
Trouver l'équation cartésienne de (H) dans ce repère.

Exercice 14 :
Soit (H) une hyperbole de foyer F et F', d'axe transverse $2a$. On se place dans le repère orthonormé où (H) admet son équation réduite, et pour lequel l'abscisse de F est positive.
On considère la droite (D) d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. Exprimer pour un point M de (E) le rapport $\frac{MF}{MD}$.

En déduire deux nouvelles caractérisations de l'hyperbole.
Les deux droites sont appelées les <u>directrice de l'hyperbole</u>, et le rapport obtenu, noté e est appelé <u>l'excentricité de l'ellipse</u>.
A quel intervalle appartient-il ?
Faire un tableau récapitulatif concernant les définitions des coniques à partir des couples foyer-directrice.
Pourrait-on obtenir un définition générale des coniques à partir de cette définition ?

Exercice 15 :
Introduire et donner trois paramétrisations différentes de l'hyperbole.

Exercice 16 :
Dans toute la suite, on se place dans un repère où l'hyperbole admet une équation réduite.

1. Montrer qu'en tout point (H) admet une tangente, dont on donnera un vecteur directeur.
2. Donner une équation de la tangente à l'hyperbole en un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0).
3. Montrer que la tangente au point M d'une hyperbole de foyers F et F' est la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$ des rayons vecteurs de ce point.
4. Soit m' le symétrique de F par rapport à la tangente T_M en M à (H).

   Montrer que m' est le point de contact de (C') le cercle directeur centré en F' avec le cercle de centre M et de rayon MF.

5. Réciproquement, on note encore m'_1 et m'_2 les points de contact de (C') avec les tangentes issues de F.

   Que peut-on dire des médiatrices de $[Fm'_1]$ et $[Fm'_2]$?

6. On considère un point m' de (C') distinct de m'_1 et m'_2. Que peut-on dire de la médiatrice de $[Fm']$?

7. En déduire le lieu géométrique des symétriques d'un foyer d'une hyperbole par rapport aux tangentes et aux asymptotes à cette courbe.

8. Déterminer le lieu géométrique des projetés orthogonaux des foyers d'une hyperbole sur ses tangentes et ses asymptotes.

9. Montrer que la portion de tangente comprise entre le point de contact et la directrice est vue du foyer associé à la directrice sous un angle droit.

10. Soit (δ) une direction donnée. Déterminer toutes les tangentes à une hyperbole (H) de direction (δ).

11. Soit P un point du plan. Déterminer toutes les tangentes à une hyperbole passant par P.

12. Déterminer le lieu géométrique des points d'où l'on peut mener à l'hyperbole (F, F', O, a, b) deux tangentes perpendiculaires.

    On appellera ce lieu le ...othoptique de l'hyperbole quand de tels points existent.

Exercice 17 :
Trouver les équations en polaire de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole, dans un repère correctement choisi;