Ellipses

AI 2012-2013

Exercice 1 :
Soient F et F' deux points du plan, et a un réel. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\{M/MF + MF' = 2a\}$ soit non vide.

Exercice 2 :
On note désormais c le réel tel que $FF' = 2c$, et on suppose que $c < a$. On dit alors que $\{M/MF + MF' = 2a\}$ est l'ellipse de foyers F et F', et de distance focale c.
Si M est un point de l'ellipse (E), on dit que $[MF]$ et $[MF']$ sont les rayons focaux.
On appelle axe focal la droite (FF') et axe non focal la médiatrice de $[FF']$. Montrer que ces deux droites sont des axes de symétrie de l'ellipse.
On appelle centre de l'ellipse l'intersection de ces deux axes, et on le notera O.

Etudier l'intersection des axes de l'ellipse avec l'ellipse.
On définit ainsi le grand axe, le petit axe, les sommets du grand axe, et les sommets du petit axe de l'ellipse.
On appelle cercles directeurs de l'ellipse les deux cercles centrés sur les foyers et de rayons $2a$. On les notera (C) et (C').
On appelle rayons vecteurs en un point M les deux vecteurs $\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{MF'}$.
On dira que un point M est intérieur à l'ellipse (respectivement extérieur à l'ellipse) si $MF + MF' < 2a$ (respectivement $MF + MF' > 2a$).

Exercice 3 :
Soit F' un point du plan, (C') un cercle centré en F', et F un point intérieur à (C'). Déterminer l'ensemble des centres des cercles tangents à (C') passant par F.
En déduire deux caractérisations de l'ellipse et une construction de l'ellipse à la règle et au compas, point par point.

Exercice 4 :
Déterminer une ellipse, connaissant un foyer F, un sommet B du petit axe, et un point M de cette ellipse. Montrer que le problème admet des solutions si M appartient ou est intérieur à une ellipse (E').

Exercice 5 :
Dans le repère orthonormé d'origine O, d'axes l'axe focal et l'axe non focal, donner l'équation de l'ellipse.
Réciproquement, dans un repère orthonormé, on considère une courbe qui admet cette équation cartésienne. Montrer qu'il s'agit d'une ellipse dont on donnera ses éléments caractéristiques.

Exercice 6 :
Soit (E) une ellipse de foyer F et F', de paramètre a. On se place dans le repère orthonormé où l'ellipse admet son équation réduite, et pour lequel l'abscisse de F est positive.
On considère la droite (D) d'équation $x = \frac{a^2}{c}$. Exprimer pour un point M de (E) le rapport $\frac{MF}{MD}$.

En déduire deux nouvelles caractérisations de l'ellipse.
Les deux droites sont appelées les directrice de l'ellipse, et le rapport obtenu, noté e est appelé l'excentricité de l'ellipse.
A quel intervalle appartient-il ?

Exercice 7 :
On appelle cercle principal de l'ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$, le cecle centré en O, de rayon a, où O est le centre de l'ellipse.
Placer l'ellipse par rapport à son cercle principal.

Exercice 8 :
Trouver deux affinités orthogonales qui transforme le cercle principal d'une ellipse en cette ellipse.
En déduire une représentation paramétrique de l'ellipse.

Exercice 9 : Figure affine d'un cercle
Trouver l'image d'un cercle par une affinité orthogonale.
On définira alors le cercle secondaire d'une ellipse.

Exercice 10 :
Déterminer l'aire d'une ellipse.

Exercice 11 : Procédé de la bande de papier
Soient les extrémités U et V d'un segment de longueur constante, assujetis à se déplacer respectivement sur deux axes orthogonaux (Ox) et (Oy), et soit M un point lié à ce segment tel que $MV = a$ et $MU = b$.
Montrer que le point M se trouve sur une ellipse, dont on donnera des éléments caractéristiques.
Toute l'ellipse est-elle atteinte ?
Que se passe-t-il quand vous vous trouvez sur une échelle qui glisse le long du mur ?

Exercice 12 :
Dans toute la suite, on se place dans un repère où l'ellipse admet une équation réduite.

1. Montrer qu'en tout point l'ellipse admet une tangente, dont on donnera un vecteur directeur.

2. Donner une équation de la tangente à l'ellipse en un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0).

3. Soit M un point de l'ellipse et P un des points du cercle dont le projeté orthogonal sur l'axe des abscisses est le même que celui de M. Comparer la tangente à l'ellipse en M avec celle au cercle principal en P.

4. Montrer que la tangente au point M d'une ellipse de foyers F et F' est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$ des rayons vecteurs de ce point.

5. Montrer que la tangente en un point M de l'ellipse de foyers F et F' est la médiatrice de $[Fm']$, où m' est le point d'intersection de la demi-droite $[F'M)$ avec le cercle directeur centré en F'.

6. En déduire le lieu géométrique des symétriques d'un foyer d'une ellipse par rapport à ses tangentes.

7. Déterminer le lieu géométrique des projetés orthogonaux des foyers d'une ellipse sur ses tangentes.

8. Montrer que la portion de tangente comprise entre le point de contact et la directrice est vue du foyer associé à la directrice sous un angle droit.

9. Soit (δ) une direction donnée. Déterminer toutes les tangentes à une ellipse (E) de direction (δ).
10. Soit P un point du plan. Déterminer toutes les tangentes à une ellipse passant par P.
11. Déterminer le lieu géométrique des points d'où l'on peut mener à l'ellipse (F, F', O, a, b) deux tangentes perpendiculaires.

    On appellera ce lieu le ...othoptique de l'ellipse.
12. Dans le procédé de construction par la bande de papier, on considère le point I tel que $OUIV$ soit un rectangle. Que peut-on dire de la droite (IM) et de la tangente à l'ellipse en ce point M ?

Exercice 13 :
On considère une ellipse (E), de grand axe AA', de cercle principal (C). Soit M un point de (E), H la projection orthogonale de M sur (AA'). La droite (MH) coupe (C) en deux points m et m' (m du même coté que M par rapport à (AA')).
A chaque point $M \in (E)$, on associe son conjugué harmonique N par rapport à m et m'.

1. Trouver l'ensemble des points N.
2. Soit K le point où l'une des tangentes menées de N à (C) coupe la droite (AA'). Montrer que KM et KN sont conjuguées par rapport aux tangentes menées de K à (E).

Exercice 14 :

1. Une tangente à un cercle de rayon a rencontre respectivement en m et m' les tangentes aux extrémités A et A' d'un même diamètre.
2. Soit une ellipse de grand axe AA' et soit BB' les extrémités du petit axe. On pose $BB' = 2b$.

    Une tangente à l'ellipse rencontre respectivement en M et M', N et N' les tangentes en A et A', B et B' à cette ellipse.

    Démontrer que l'on a $\overline{AM}.\overline{A'M'} = b^2$ et $\overline{BN}.\overline{B'N'} = a^2$.

Exercice 15 :
A tout point du plan complexe, d'affixe $z \neq 0$, on associe le point $Z := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1. Exprimer les coordonnées de X et Y de M en fonction de r et α, module et argument principal de z.
2. En déduire que lorsque m décrit un cercle (C) de centre O, de rayon R, le point M décrit une ellipse (E) dont on déterminera les axes et les foyers.