0pt0.4pt

1. Programme abordé :
   lois de composition internes (L.C.I.),relations d'equivalences, groupes/anneaux, sous groupes/anneaux, morphismes, actions de groupes, stabilisateur d'un élément, equation aux classes.
   Les anneaux sont supposés unitaires par définition, leurs lois seront notées comme d'habitude $+$ et $\times$ et on définit les sous anneaux comme les sous groupes additifs stables par multiplication et contenant le neutre de la multiplication.
   Pour les groupes on adoptera principalement la notation multiplicative et l'élément neutre sera noté "1".

2. EXERCICE : exemples/ contres exemples
   1) Donner un exemple de LCI :
   a) associative mais pas commutative
   b) ni associative ni commutative (prendre une LCI classique sur les vecteurs de l'espace)
   c) commutative mais pas associative (prendre un ensemble à trois éléments et penser au jeu "poule renard vipère").

   2) Donner un exemple d'anneau A contenant une partie B stable par les deux loi telle que B est un anneau pour les lois restreintes mais n'est pas un sous anneau de A.

   3) a) Montrer que dans un groupe commutatif l'ordre du composé de deux éléments divise le ppcm des ordres.
   b) Donner un contre exemple dans le cas non commutatif (penser aux reflexions du plan).

   4) Soit X un ensemble fini non vide. a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{R}$ des relations d'équivalences sur X est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{R}$ des partitions de X (penser aux classes d'équivalence).
   b) On suppose X fini de cardinal $n > 0$ et on considère $A_1, ..., A_k$ une partition de X. Montrer qu'il existe un groupe G et une action de G sur X telle que les orbites pour cette actions sont $A_1, ..., A_k$.

   5) Soit E un espace vectoriel. Montrer que $Gl(E)$ opère sur les Sous ev de E.

3. EXERCICE : actions de groupes en géométrie
   1) Montrer que le groupe des bijections affines du plan dans lui même opère naturellement sur l'ensemble des points du plan et sur l'ensemble des droites du plan.

   2) Montrer que pour tout sous groupe fini G du groupe des automorphismes affines du plan il existe un point fixe par tous les éléments de G (considérer le barycentre d'une orbite).

   3) Montrer que pour tout sous groupe fini G du groupe des automorphismes linéaires du plan il existe un produit scalaire pour lequel tous les éléments de G sont des isométries (pour une forme quadratique DP q_0 considérer la somme des $q \circ g$ pour $g \in G$).

   4) On considère un tétraèdre régulier T de l'espace euclidien (vu comme ensemble de sommets). Vérifier que le groupe des isométries de T agit sur T et en déduire qu'il est isomorphe

à σ_4.

5) On considère un pentagone régulier P du plan euclidien (vu comme ensemble de sommets).
a) Déterminer le stabilisateur de chaque point de P pour l'action sur P du groupe D_5 des isométries de P.
b) Déterminer le nombre d'orbites et déduire le cardinal de D_5.
c) Déterminer la liste de tous les éléments de D_5.

4. EXERCICE : calculs dans les anneaux de matrices

1) Vérifier que les démonstrations des formules du binôme pour $(x+y)^n$ et de factorisation de $x^n - y^n$ restent valables dans un anneau sous la condition que x et y commutent.

2) Soit $N \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice de nilpotence p et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$.
a) Calculer $(I_m + N)^n$.
b) Exprimer $(I_m + N)^{-1}$ comme un polynôme en N (intuition : faites une analogie avec les séries entières).

3) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E tel que $P(f) = 0$ avec $P = X^2 - 3X + 2$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que $\forall f \in \mathcal{L}(E)$ l'application $P \mapsto P(f)$ est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbre.
a) Trouver le reste de la division euclidienne de X^n par P (on ne cherchera pas le quotient).
b) Montrer que Id, f et f^n forment une famille liée en déterminant une combinaison nulle non triviale.

5. EXERCICE : action de groupe et théorie des groupes

On considère ici un groupe G fini de cardinal n.
1) a)(th de lagrange) soit H un sous groupe de G. Vérifier H agit sur G par multiplication à gauche $((h, x) \mapsto h.x)$ puis à l'aide de l'équation aux classes montrer que le cardinal de H divise celui de G.
b) En déduire ce corolaire bien connu : l'ordre de tout élt de G divise le cardinal de G.

2) (th de cauchy) On suppose que p est un diviseur premier de n. On considère l'ensemble $E = \{(g_1, .., g_p) \in G^p / g_1 ... g_p = 1\}$. On considère le sous groupe S de σ_p engendré par la permutation circulaire $(1, 2, .., p)$.
a) Déterminer les cardinaux de E et S.
b) Montrer que S agit sur E par $(\sigma, (g_1, .., g_p)) \mapsto (g_{\sigma(1)}, .., g_{\sigma(p)})$.
c) Grâce à l'équation aux classes montrer que qu'il existe au moins un élément de E (en plus de $(1, .., 1)$) dont l'orbite est réduite à 1 élément.
d) Montrer que les seuls éléments du type précédent sont de la forme $(g, g, .., g)$ avec $g \in G$ et déduire qu'il existe au moins un élément d'ordre p dans G .

3) Dans cette question on suppose que n est une puissance d'un premier p. On appelle centre de G l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les élts de G.
a) Montrer que G agit sur lui même par conjugaison $((g, x) \mapsto g.x.g^{-1})$.

b) Grâce à l'équation aux classes montrer qu'il existe au moins un elt de G (en plus de 1) dont l'orbite est réduite à un élément.
c) En déduire que le centre de G est un sous groupe non réduit au neutre.

4) On suppose ici que $n = p^2$ avec p premier. on note Z le centre de G
En considérant le quotient G/Z montrer que G est commutatif.

6. <u>EXERCICE : un théorème d'isomorphisme</u>
On rappelle que pour des anneaux A et B et pour I un idéel de A, tout morphisme d'anneaux de A vers B dont le noyau est I définit un morphisme injectif de A/I dans B.

1) soit A un anneau et I, J des idéaux de A tq $I \subset J$ notons $p : A \to A/I$ la projection canonique, posons $\overline{A} = p(A)$ et $\overline{J} = p(J)$.
a) Vérifier que $\overline{J}$ est un idéal de $\overline{A}$.
b) Montrer l'isomorphisme $A/J \cong \overline{A}/\overline{J}$.

2) Application : On considère l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$, p un nombre premier.
a) Montrer que $\mathbb{F}_p[X] \cong \mathbb{Z}[X]/(p)$.
b) Montrer que $\mathbb{Z}[i]/(p) \cong F_p[X]/(X^2+1)$.

Remarque : le dernier isomorphisme intervient dans la démo du théorème des deux carrés du "cours d'algèbre" de Perrin.