

## HEC 2004, math 2, option scientifique

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

L'objet de ce problème est la recherche et l'étude de lois possédant une propriété, dite de *stabilité*, qui intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes satisfaisant une certaine invariance d'échelle.

• Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. On dit qu'une suite  $(X_k)_{k \geq 1}$  de variables aléatoires est une *suite de copies* de  $X$  si  $(X_k)_{k \geq 1}$  est une suite de variables indépendantes ayant toutes même loi que  $X$ .

• On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit une loi *stable* si il existe une suite réelle strictement positive  $(a_n)_{n \geq 1}$  telle que, pour toute suite  $(X_k)_{k \geq 1}$  de copies de  $X$  et pour tout entier  $n$  supérieur ou égal 1,  $X_1 + \dots + X_n$ , et  $a_n X$  ont même loi. On vérifie facilement l'unicité de la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  si  $X$  n'est pas nulle presque sûrement. On dira alors que  $(a_n)_{n \geq 1}$  est la *suite associée* à la loi de  $X$ .

On note  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1 (*i.e.*  $\{1, 2, 3, \dots\}$ ).

On admettra que  $\forall A > 0$ ,  $\text{Arctan } A + \text{Arctan } \frac{1}{A} = \frac{\pi}{2}$  où l'expression  $\text{Arctan}$  désigne la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

### Partie I : Un résultat sur certaines suites positives

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels *strictement positifs* vérifiant les deux propriétés suivantes:

- pour tout couple d'entiers  $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ ,  $u_{mn} = u_m u_n$ ,
- il existe un réel strictement positif  $A$  tel que, pour tout couple  $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ , si  $m \leq n$ , alors  $u_m \leq A u_n$ .

On veut montrer qu'il existe un réel positif  $\alpha$  tel que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = n^\alpha$ .

- 1) Montrer que  $u_1 = 1$ .
- 2) Montrer que, pour tout couple  $(r, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ ,  $u_{r^k} = u_r^k$ .
- 3) Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $r \geq 2$ . Montrer qu'il existe un réel  $\alpha_r$  tel que, pour tout entier  $n$  de la forme  $r^k$ , où  $k$  est un entier positif,  $u_n = n^{\alpha_r}$ . Exprimer  $\alpha_r$  en fonction de  $r$  et de  $u_r$ .
- 4) Soit  $(r_1, r_2) \in \mathbb{N}^{*2}$ ,  $r_2 > r_1 \geq 2$ . On introduit alors les réels  $\alpha_{r_1}$  et  $\alpha_{r_2}$  définis selon la question précédente.
  - a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il existe un entier  $\ell$  tel que  $r_2^k \leq r_1^\ell < r_2^{k+1}$ .
  - b) En déduire que  $(r_2^k)^{\alpha_{r_2}} \leq A (r_2^{k+1})^{\alpha_{r_1}}$  et  $(r_2^k)^{\alpha_{r_1}} \leq A (r_2^{k+1})^{\alpha_{r_2}}$ .
  - c) En faisant tendre  $k$  vers l'infini, déduire l'égalité  $\alpha_{r_1} = \alpha_{r_2}$ . Conclure.

### Partie II : La loi gaussienne

**A** On rappelle l'expression de la densité d'une variable gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$  :

$$f_{m, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- 1) Soit  $a$  un réel *strictement positif* et  $b$  et  $c$  deux réels quelconques. Trouver trois réels  $\alpha, m, \sigma$ , que l'on exprimera en fonction de  $a, b, c$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = ax^2 + bx + c$$

- 2) En déduire que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(ax^2 + bx + c)) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ .
- 3) Soient  $G$  et  $G'$  deux variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes de variances respectives  $\sigma^2$  et  $\sigma'^2$ . **Redémontrer** en calculant la densité de la loi de  $G + G'$ , que  $G + G'$  est une variable gaussienne dont on donnera l'espérance et la variance.
- 4) Montrer que  $G$  suit une loi stable. Quelle est la suite associée à la loi de  $G$  ?

**B** Dans cette section,  $X$  est une variable aléatoire qui suit une loi stable et qui admet une espérance  $m$  et une variance  $\sigma^2$  strictement positive. On ne suppose pas que  $X$  suit une loi gaussienne. Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de copies de  $X$  et  $(a_k)_{k \geq 1}$  la suite associée à la loi de  $X$ .

- 1) En considérant les variances de  $X_1 + \dots + X_n$  et de  $a_n X$ , donner, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la valeur de  $a_n$ . Montrer que  $m = 0$ .
- 2) En appliquant le théorème de la limite centrée, montrer que  $X$  suit une loi gaussienne.

### Partie III : La loi de Cauchy

- 1) Soit  $a > 0$ . Vérifier que la fonction  $f_a : x \mapsto \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$  est bien une densité de probabilité. (On utilisera le changement de variable  $x = a \tan t$ .  
On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Cauchy de paramètre  $a$  si elle admet la fonction  $f_a$  pour densité.
- 2) Soit  $Z$  une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy de paramètre égal à 1.
  - a) La variable  $Z$  admet-elle une espérance ?
  - b) Soit  $\lambda > 0$ . Quelle est la loi de  $\lambda Z$  ?
- 3) Soit  $P$  un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels. Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux nombres complexes *distincts* de partie imaginaire *strictement positive*. Montrer que si  $z_1$  et  $z_2$  sont des racines de  $P$ , alors  $P = 0$ . (On remarquera que  $\bar{z}_1$  et  $\bar{z}_2$  sont également racines de  $P$ .)
- 4) Soient  $a, a' > 0$ , et  $y \in \mathbb{R}^*$ . Soient  $u, u', v, v'$  quatre réels tels que

$$u + iv = \frac{a'}{\pi((y - ia)^2 + a'^2)} \quad \text{et} \quad u' + iv' = \frac{a}{\pi((y + ia')^2 + a^2)}$$

où  $i$  désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

- a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{aa'}{\pi^2(x^2 + a^2)((x - y)^2 + a'^2)} = \frac{vx + au}{\pi(x^2 + a^2)} + \frac{v'(x - y) + a'u'}{\pi((x - y)^2 + a'^2)} \quad (*)$$

(On multipliera les deux membres de  $(*)$  par leur dénominateur commun et on appliquera la question précédente en prenant  $z_1 = ia$  et  $z_2 = y + ia'$ .)

- b) On **admet** les égalités suivantes :

$$u + iv = \frac{a'(y^2 + a'^2 - a^2) + 2iaa'y}{\pi(y^2 + (a + a')^2)(y^2 + (a - a')^2)}$$

$$u' + iv' = \frac{a(y^2 + a^2 - a'^2) - 2iaa'y}{\pi(y^2 + (a + a')^2)(y^2 + (a - a')^2)}$$

Montrer que :

$$u + u' = \frac{a + a'}{\pi(y^2 + (a + a')^2)}$$

- 5) Soit  $B > 0$ . Calculer  $\int_{-B}^B \frac{x}{x^2 + a^2} dx$  et  $\int_{-B}^B \frac{x - y}{(x - y)^2 + a^2} dx$ .
- 6) Soient  $Z_a$  et  $Z_{a'}$  deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Cauchy de paramètres respectifs  $a$  et  $a'$ . Montrer que la valeur de la densité de la loi de  $Z_a + Z_{a'}$  au point  $y$  est égale à  $u + u'$  (cf. question 4). En déduire la loi de  $Z_a + Z_{a'}$ .
- 7) En déduire que  $Z$  suit une loi stable. Quelle est la suite associée à la loi de  $Z$  ?

## Partie IV : Les événements exceptionnels

Du fait de la décroissance rapide à l'infini de la fonction densité des variables gaussiennes, celles-ci n'accordent que peu d'importance aux valeurs extrêmes. Aussi, pour inclure, dans un modèle mathématique, l'éventualité de phénomènes extrêmes, on est amené à privilégier des lois dont la fonction densité décroît moins vite à l'infini. Le but de cette partie est d'étudier ce qu'il en est pour la loi de Cauchy.

Dans cette partie,  $(X_i)_{i \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Cauchy de paramètre 1.

On dira qu'un événement exceptionnel s'est produit avant l'instant  $n$ , si il existe un entier  $k$  inférieur ou égal à  $n$  tel que, pour tout entier  $i$  inférieur ou égal à  $n$  et différent de  $k$ ,  $|X_k| > 2|X_i|$ . Autrement dit, à l'instant  $n$ , la variable la plus forte de l'histoire (en valeur absolue) est supérieure au double de chacune des autres variables. On appellera  $E_n$  un tel événement. Ainsi,

$$E_n = \bigcup_{k=1}^n \left( \bigcap_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (|X_k| > 2|X_i|) \right)$$

1) Montrer que :

$$P(E_n) = nP\left(\bigcap_{i=2}^n (|X_1| > 2|X_i|)\right)$$

2) En déduire que :

$$\forall A > 0, \quad P(E_n) \geq nP\left((|X_1| > 2A) \cap \left(\bigcap_{i=2}^n (|X_i| < A)\right)\right)$$

3) Montrer que :  $\forall A > 0, P(|X_1| > A) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} \frac{1}{A}$ .

4) Soit  $\lambda > 0$ , et  $n$  assez grand pour que  $\frac{\pi\lambda}{2n} < \frac{\pi}{2}$ . En choisissant  $A = \frac{1}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}$ , montrer que

$$P(E_n) \geq nP\left(|X_1| > \frac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-1}$$

5) Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\lambda > 0$ . Montrer que, pour tout entier  $n$  assez grand,  $P(E_n) > \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda} - \varepsilon$ .

6) En déduire que, pour tout entier  $n$  assez grand,  $P(E_n) > \frac{1}{6}$ .

## Partie V : Le nombre $a_n$ est une puissance de $n$

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi stable. Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de copies de  $X$  et  $(a_k)_{k \geq 1}$  la suite associée à la loi de  $X$ .

**A** Une variable aléatoire  $X$  est dite *symétrique* si elle a la même loi que la variable  $-X$ . Autrement dit, pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $P(X \in I) = P(-X \in I)$  (exemple: une variable gaussienne centrée).

Dans cette section, on suppose  $X$  non nulle et symétrique.

1) Montrer que  $P(X > 0) = \frac{1}{2}(1 - P(X = 0))$ .

2) Montrer qu'il existe  $\mu > 0$  tel que  $P(X > \mu) > 0$ .

3)a) Montrer que, pour tout couple  $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ ,  $a_{m+n}X$  a même loi que  $a_m X_1 + a_n X_2$ .

b) En déduire que, pour tout  $k$ -uplet d'entiers  $(m_1, \dots, m_k)$ ,  $a_{m_1 + \dots + m_k} X$  a même loi que  $a_{m_1} X_1 + \dots + a_{m_k} X_k$ .

c) En prenant tous les entiers  $m_i$  égaux à un même entier  $\ell$ , montrer que  $a_{k\ell} = a_k a_\ell$ .

- 4) En considérant l'événement  $(X_1 \geq 0) \cap (X_2 > t)$ , montrer en utilisant la question **V.A.3.a**, que pour tout couple  $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ , et pour tout  $t > 0$ ,

$$P(X > \frac{a_n}{a_{m+n}}t) \geq \frac{1}{2}P(X > t)$$

- 5) En utilisant la question **V.A.2**, montrer que l'ensemble  $\left\{ \frac{a_n}{a_{n+m}} / (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}$  est majoré. En déduire l'existence d'un réel  $\alpha$  tel que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $a_n = n^\alpha$ .

**B** On suppose que  $X$  suit une loi stable à densité, mais on ne suppose plus que  $X$  est symétrique.

- 1) Montrer que la variable  $X_1 - X_2$  est symétrique.
- 2) Montrer que  $X_1 - X_2$  suit une loi stable. Soit  $(b_n)_{n \geq 1}$  la suite associée à la loi de  $X_1 - X_2$ . Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $a_n = b_n$ . Conclure.