Agrégation interne de Mathématiques

(et CAERPA)

Session 2008

Deuxième épreuve écrite

Introduction et notations

Dans ce problème, on note $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombres entiers, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels.

On dit qu'un endomorphisme T d'un espace vectoriel est *nilpotent* s'il existe un nombre entier $s \geqslant 0$ tel que $\mathrm{T}^s = 0$.

Si f est une fonction de classe C^∞ de la variable réelle x et n un entier $\geqslant 0$, on note $f^{(n)}$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ la dérivée n-ième de la fonction f.

Si g est une fonction de classe C^∞ de la variable $x = (x_1, \ldots, x_n)$ définie dans une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$, on note $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de g par rapport à la variable x_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Pour des entiers p et n tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on définit les coefficients binomiaux par

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)}{p!} \quad \text{pour} \quad 0 < p < n, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

L'un des objets de ce problème est la démonstration et l'application de la *formule de réversion de Lagrange* qui permet de calculer, dans certains cas, la dérivée n-ième d'une fonction réciproque.

On étudie d'abord la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dont le terme général est l'unique solution $\geqslant 0$ de l'équation

$$(\mathrm{E}_n) \qquad x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0.$$

Dans un premier temps, on établit directement une expression explicite de u_n comme somme d'une série convergente (parties **I** et **II**).
On établit ensuite la formule de réversion de Lagrange (partie **III**).
On applique enfin cette formule pour obtenir une autre démonstration de l'expression de u_n (partie **IV**).

On rappelle les résultats suivants qui pourront être utilisés sans démonstration :

A) Lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, on a l'équivalence (*formule de Stirling*) :

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,.$$

B) Pour tout entier $q \geqslant 1$, la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \binom{n+q-1}{n} x^n$$

a un rayon de convergence égal à 1 et, pour $-1 < x < 1$, sa somme est égale à $1/(1+x)^q$.

C) Le *théorème des fonctions implicites* pour une fonction F de classe C^∞, définie sur $\mathbf{R}^3$, peut s'énoncer ainsi :

On suppose qu'en un point (x_0, y_0, z_0) de $\mathbf{R}^3$, on a

$$\mathrm{F}(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Il existe alors un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) dans $\mathbf{R}^2$, un voisinage ouvert V de z_0 dans $\mathbf{R}$ et une fonction $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ caractérisée par la condition

$$\forall (x,y) \in \mathrm{U},\ \forall z \in \mathrm{V}, \quad (\mathrm{F}(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow z = \varphi(x,y)).$$

La fonction φ est de classe C^∞ sur U et pour tout point (a,b) de U , on a

$$F(a,b,\varphi(a,b)) = 0\,,$$

ainsi que les relations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,b) = -\,\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\varphi(a,b))}{\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,\varphi(a,b))}\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a,b) = -\,\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\varphi(a,b))}{\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,\varphi(a,b))}\,.$$

On dit que la fonction φ est *définie implicitement* sur U par la relation $F(x,y,z) = 0$.

D) Soit $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ une suite double de nombres réels. Si la somme $\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|\Big)$ est finie, alors les trois expressions

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}\Big)\,,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,k}\Big)\,,\quad \sum_{q=0}^{\infty}\Big(\sum_{n+k=q}a_{n,k}\Big)\,,$$

ont un sens et sont égales. Leur valeur commune est notée $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}$.

E) Soit R un nombre réel >0 . Si les fonctions f et g sont sommes de séries entières convergentes dans l'intervalle $]-R,R[$, leur somme $f+g$ et leur produit fg sont aussi sommes de séries entières convergentes dans le même intervalle.

I . La suite (u_n)

1) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'existence d'une unique solution réelle $\geqslant 0$ de l'équation

$$(E_n) \qquad x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0.$$

Cette solution est notée u_n . Démontrer que l'on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

2) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

3) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0.$$

4) a) Calculer u_2 .
   b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\frac{1}{2}$.

5) Pour $n \geqslant 1$, on pose $\varepsilon_n = u_n - \frac{1}{2}$. Démontrer que $n\,\varepsilon_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

6) En déduire, à l'aide de la question (I.3), le développement asymptotique suivant de u_n , pour n tendant vers $+\infty$:

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\,.\,2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\,.$$

7) a) Déterminer le plus petit entier $s \geqslant 1$ pour lequel on a

$$0 < u_s - \frac{1}{2} < 10^{-2}.$$

Tournez la page S.V.P.

Pour cela, on pourra déterminer, avec une calculatrice, le signe de $f_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{100}\right)$ pour $n = 2, 3, \ldots$, où f_n est la fonction définie par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

b) Écrire en français une procédure qui, pour un entier $p \geqslant 1$ donné, permet de déterminer le plus petit entier s pour lequel on a

$$0 < u_s - \frac{1}{2} \leqslant 10^{-p}.$$

On pourra utiliser les fonctions g_n définies par

$$g_n(x) = (x-1)\, f_n(x).$$

8) On se propose de démontrer l'inégalité suivante, valable pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$(1) \qquad u_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

a) En utilisant la fonction g_n définie dans la question (I.7), démontrer que l'inégalité (1) est équivalente à l'inégalité suivante :

$$(2) \qquad \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

b) Pour $x > 0$, on pose

$$\psi(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) - (x+1)\ln(2).$$

Étudier la variation de la fonction ψ et en déduire l'inégalité (2).

9) a) Démontrer l'inégalité $\frac{1}{2} < u_4 < \frac{6}{11}$.

b) En déduire que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 4$, l'inégalité

$$\frac{u_n}{2(1-u_n)} < \frac{n^{\frac{n}{n+1}}}{n+1}.$$

II . Expression de u_n comme somme d'une série

Dans cette partie, on se propose d'établir, lorsque l'entier p est assez grand, l'expression suivante de u_p comme somme d'une série convergente :

$$(\mathrm{T}_p) \qquad u_p = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^{n(p+1)+1}} \binom{n(p+1)}{n-1}.$$

1) Soit p un entier $\geqslant 1$. On note S_p la série entière définie par

$$\mathrm{S}_p(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n} \binom{n(p+1)}{n-1} x^n.$$

a) Démontrer que le rayon de convergence ρ_p de la série entière S_p est donné par

$$\rho_p = \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}.$$

b) Démontrer que, pour $p \geqslant 2$, la série du second membre de la relation (T_p) est convergente. [On utilisera la question (I.8).]

2) a) Démontrer, par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$, l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,2^{2k+1}} \binom{2k}{k-1} = \frac{1}{2} - \frac{2(n+2)}{(n+1)\,2^{2n+3}} \binom{2(n+1)}{n}.$$

b) En déduire la relation (T_1).

3) On a admis dans les Préliminaires que, pour tout entier $q \geqslant 1$, la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \binom{n+q-1}{n} x^n$$

a un rayon de convergence égal à 1, et que, pour $x \in]-1,1[$, sa somme est égale à $1/(1+x)^q$.

En déduire, pour $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$ et $x \in]-1,1[$, l'égalité

$$\frac{x^n}{(1+x)^{n(p+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n(p+1)+k-1}{k} x^{n+k}.$$

4) Pour $p \geqslant 1$, on pose

$$v_p = 2u_p - 1.$$

a) Démontrer que l'on a

$$\frac{v_p}{(1+v_p)^{p+1}} = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

b) Déduire de ce qui précède que l'on a, pour $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$, l'égalité

$$\frac{1}{2^{n(p+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n(p+1)+k-1}{k} v_p^{n+k}.$$

5) **Dans toute la fin de cette deuxième partie, on fixe l'entier $p \geqslant 4$, et on pose**

$$a_{n,k} = \frac{(-1)^k}{2n} \binom{n(p+1)+k-1}{k} \binom{n(p+1)}{n-1} v_p^{n+k}.$$

a) Démontrer la relation

$$(\mathrm{U}_p) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^{n(p+1)+1}} \binom{n(p+1)}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \right).$$

b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la série $\sum_{k\geqslant 0} |a_{n,k}|$ est convergente et déterminer sa somme.

c) En utilisant les questions (I.9) et (II.1), démontrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| \right)$ est convergente.

Tournez la page S.V.P.

6) Soient q un entier $\geqslant 2$ et $\mathbf{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont le degré est $\leqslant q-1$. On note Δ_q l'application qui, à un polynôme $\mathrm{P(X)}$ de degré $\leqslant q-1$, associe le polynôme $\mathrm{P(X+1)} - \mathrm{P(X)}$.

a) Démontrer que Δ_q est un endomorphisme nilpotent de $\mathbf{R}_{q-1}[\mathrm{X}]$.

b) En déduire que, si P est un polynôme de degré $\leqslant q-1$, on a

$$\sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \binom{q}{j} \mathrm{P}(\mathrm{X}+j) = 0.$$

7) a) Soit toujours q un entier $\geqslant 2$. En utilisant la question précédente, démontrer que la somme $\sum a_{n,k}$ étendue aux indices (n,k) tels que $n \geqslant 1$, $k \geqslant 0$ et $n+k = q+1$, est nulle.

b) En déduire la relation (T_p) pour $p \geqslant 4$.

8) On fixe toujours l'entier $p \geqslant 4$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\lambda_n = \frac{1}{n\, 2^{n(p+1)+1}} \binom{n(p+1)}{n-1}.$$

a) Démontrer l'existence d'un nombre réel μ_p appartenant à l'intervalle $]0,1[$ tel que l'on ait

$$\lambda_{n+1} \sim \mu_p \lambda_n \qquad \text{lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

b) Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \lambda_n$ est convergente et que son reste

$$\mathrm{R}_p(n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k\, 2^{k(p+1)+1}} \binom{k(p+1)}{k-1}$$

satisfait à l'équivalence $\mathrm{R}_p(n) \sim \dfrac{\mu_p}{1-\mu_p} \lambda_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

III . Réversion de Lagrange

Dans cette partie f et Φ désignent deux fonctions de classe C^∞ définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles. Pour x, t et $y \in \mathbf{R}$, on pose

$$\mathrm{F}(x,t,y) = t - y + x\,\Phi(y).$$

1) a) En utilisant les rappels du Préliminaire, démontrer qu'il existe un voisinage U de $(0,0)$ dans $\mathbf{R}^2$ et une fonction $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbf{R}$ de classe C^∞, telle que $\varphi(0,0) = 0$, et $\mathrm{F}(x,t,\varphi(x,t)) = 0$ pour $(x,t) \in \mathrm{U}$.

b) Démontrer que l'on a dans U l'égalité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = (\Phi \circ \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

2) On définit la fonction u dans U par $u = f \circ \varphi$.

a) Vérifier que la fonction u est de classe C^∞ et satisfait à l'égalité

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\Phi \circ \varphi) \frac{\partial u}{\partial t}.$$

b) Plus généralement, démontrer, par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$, que l'on a

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Big((\Phi \circ \varphi)^n \frac{\partial u}{\partial t}\Big).$$

c) En déduire que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour $(0,t) \in \mathrm{U}$, l'égalité

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\Phi(t)^n f'(t)).$$

3) Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$.

a) Justifier que l'on peut définir une fonction σ dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ par

$$\sigma(s) = \frac{s}{g(s)} \quad \text{si} \quad s \neq 0,$$
$$\sigma(0) = \frac{1}{g'(0)}.$$

b) Démontrer que la fonction σ est de classe C^1 au voisinage de 0.

c) Plus précisément, démontrer que la fonction σ est de classe C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$. [Pour cela, on pourra calculer et utiliser l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g'(st)\,dt$.]

4) Dans la fin de cette partie du problème, on conserve la fonction g de la question (III.3). Expliquer l'existence d'un intervalle J, voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$, et d'une fonction h, de classe C^∞ sur $g(\mathrm{J})$, qui soit réciproque de la restriction $g|\mathrm{J}$.

5) Les résultats des questions (III.1) et (III.2) restent valables lorsque la fonction Φ n'est définie que dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}$ car d'emblée on n'a utilisé que des propriétés locales de la fonction Φ. On pourra utiliser ces résultats dans ce cadre plus étendu.

Dans cette question, on prend pour fonction f la fonction identique (caractérisée par $f(x) = x$) et pour fonction Φ la fonction σ définie dans la question (III.3).

a) Démontrer que l'on a alors $\varphi(x,0) = h(x)$ pour x voisin de 0.

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, les fonctions $\dfrac{d^n h}{dx^n}$ et $\dfrac{d^{n-1}(\sigma^n)}{dt^{n-1}}$ prennent la même valeur au point 0, c'est-à-dire

$$\frac{d^n h}{dx^n}(0) = \frac{d^{n-1}(\sigma^n)}{dt^{n-1}}(0).$$

Cette relation constitue la *formule de réversion de Lagrange.*

6) Plus généralement, démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour toute fonction f de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, la relation

$$\frac{d^n(f \circ h)}{dx^n}(0) = \frac{d^{n-1}(\sigma^n f')}{dt^{n-1}}(0).$$

IV . Application à la suite (u_n)

1) Pour $p \geqslant 1$ et $x \in \mathbf{R}$, $x \neq -1$, on pose

$$\tau_p(x) = \frac{x}{(1+x)^{p+1}}.$$

Rappelons que ρ_p désigne le rayon de convergence de la série entière S_p calculé dans la question (II.1).

Démontrer que la fonction τ_p réalise un homéomorphisme de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{p}\right]$ sur l'intervalle $[0, \rho_p]$, et un difféomorphisme de classe C^∞ de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{p}\right[$ sur l'intervalle $[0, \rho_p[$,

2) Pour $p \geqslant 1$, on note $w_p : [0, \rho_p] \to \mathbf{R}$ la fonction réciproque de la restriction de la fonction τ_p à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{p}\right]$. Démontrer, à l'aide de la formule de réversion de Lagrange, que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{w_p^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n}\binom{n(p+1)}{n-1}.$$

3) Soit $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ une série à termes > 0. On suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha > 1$ tel que l'on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On se propose de démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ est convergente. Pour cela, on choisit un nombre réel β tel que $1 < \beta < \alpha$, et on considère la série de terme général $b_n = 1/n^\beta$.

a) Dire pourquoi la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} b_n$ est convergente.

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ est convergente.

4) On a introduit dans la question (II.1) la série entière S_p définie par

$$\mathrm{S}_p(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n}\binom{n(p+1)}{n-1} x^n,$$

et on a calculé son rayon de convergence ρ_p.

Démontrer que cette série entière est convergente sur tout l'intervalle $[-\rho_p, \rho_p]$.

5) On se propose de démontrer l'égalité $w_p = 2\,\mathrm{S}_p$ sur l'intervalle $[0, \rho_p]$.

a) Démontrer que les fonctions $x \mapsto 2\,\mathrm{S}_p(x) - x\,(1 + 2\,\mathrm{S}_p(x))^{p+1}$ et $x \mapsto w_p(x) - x\,(1 + w_p(x))^{p+1}$ ont mêmes développements limités à tous ordres, au voisinage de 0.

b) En déduire que, pour tout $x \in [0, \rho_p]$, on a $2\,\mathrm{S}_p(x) - x\,(1 + 2\,\mathrm{S}_p(x))^{p+1} = 0$.

c) En déduire que l'on a $w_p = 2\,\mathrm{S}_p$ sur l'intervalle $[0, \rho_p]$.

6) a) Vérifier que le nombre réel v_p défini dans la question (II.4) appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{p}\right]$ pour $p \geqslant 1$.

b) Déduire de ce qui précède une autre démonstration, pour $p \geqslant 1$, de la relation

$$(\mathrm{T}_p) \qquad u_p = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^{n(p+1)+1}} \binom{n(p+1)}{n-1}.$$

de la partie II de l'énoncé.

— o o o —