0pt0.4pt

1. Généralités : :
   Programme abordé :
   Isométries linéaires et affines de l'espace et du plan, fonctions affines, parties convexes du plan ou de l'espace, repère affine du plan et de l'espace.

   rappels : les applications affines préservent les barycentres, envoient un sous espace affine sur un sous espace affine , envoyent un repère sur un repère . La partie linéaire d'une composée est la composée des parties linéaires. Une application affine est complètement déterminée par la donnée de l'image des points d'un repère affine.
   Les isométries affines préservent de plus la dimension des sous espaces affines, l'orthogonalité et la distance ; elles envoyent donc un repère orthonormé sur un repère orthonormé.La partie linéaire d'une isométrie affine est une isométrie linéaire et les translations sont les isométries de partie linéaire égale à l'identité.

   notations :
   Dans toute la planche E désignera l'espace affine euclidien de dimension 2 ou 3 et $\vec{E}$ l'espace vectoriel euclidien associé, c'est à dire sa direction.
   De plus si f est une application affine on notera $\vec{f}$ sa partie linéaire et $Is(E)$ et $Is^+(E)$ désigneront respectivement l'ensemble des isométries affines et des déplacements affines de E.
   Par ailleurs X désignera une partie non vide de E.
   Sauf pour le dernier exo, toutes les isométries considérées seront des isométries affines.

2. EXERCICE : pour quelles isométries peut on parler de groupe ?
   1)a) Montrer que l'ensemble des $g \in Is(E)$ tel que $g(X) = X$ est un sous groupe de $Is(E)$.
   b) Vérifier que pour $g \in Is(E)$ telle que $g(X) \subset X$ et $g(X) \neq X$, g^{-1} ne stabilise pas X.

   Commentaire : Pour parler de groupe d'isométries de X il faut donc "sacrifier" celles qui ne vérifient pas $g(X) = X$.
   La suite montre que dans le cas compact cette condition est automatiquement vérifiée.

   2) a) On suppose dans cette question X compacte. Montrer que pour $f \in Is(E)$ on a l'implication $f(X) \subset X \Rightarrow f(X) = X$. (on pourra raisonner par l'absurde, considérer la suite $(f^n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a \in X - f(X)$ et étudier la distance entre deux termes quelconques).

   Commentaire : Dans le cas compact (fermé et borné) il n'y a donc rien à "sacrifier".
   Maintenant, vérifions qu'en enlevant une de ces hypothèses ce n'est plus forcément vrai.

   2)b)(cas non borné) Considérons le demi espace X des points de premiere coordonnée positive (dans un Repère quelconque fixé).
   Montrer que l'ensemble des $g \in Is(E)$ tel que $g(X) \subsetneq X$ n'est pas vide.
   c)(cas non fermé) Considérons le cas où E est le plan muni d'un répère orthonormé direct et où X désigne les points du cercle dont l'affixe dans ce repère est de la forme e^{in} avec $\in \mathbb{N}$. Montrer que la rotation g d'angle 1 radian vérifie $g(X) \subsetneq X$.

   Dans toute la suite on appellera groupe des isométries $Is(X)$ de X l'ensemble des $f \in Is(E)$

vérifiant $f(X) = X$.

3. EXERCICE : Exemples de groupes d'isométries d'un ensemble donné.
On entend par triangle, tétraedre, carré etc... l'ensemble des sommets du triangle, tétraèdre...
On verra en exo que les autres possibilités reviennent essentiellement au même.
Dessiner X et déterminer $Is(X)$ dans les cas suivants.

A)sous ensembles du plan.

1) avec X un segment non réduit à un point.
2) avec X un triangle équilatéral.
3) avec X un carré.
4) avec X l'union de deux droites sécantes.

B) sous ensembles de l'espace.

1) avec X l'union de deux droites non coplanaires.
2) avec X l'union de deux plans sécants
3) avec X un tétraèdre régulier (faire agir $Is(X)$ sur les sommets)

4. EXERCICE (Des cas où on se ramène aux isométries linéaires) :
1)a)Montrer que si X admet deux centres de symétrie O et O' alors la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{OO'}$ appartient à $Is(X)$.
b) Montrer que si X admet un centre de symétrie O alors pour tout $f \in Is(X)$, le point $f(O)$ est encore centre de symétrie.
c) En déduire que si X est bornée et admet un centre de symétrie O alors O est point fixe de tous les éléments de $Is(X)$.
2) Montrer que si X est fini, l'isobarycentre des élts de X est point fixe de tous les elts de $Is(X)$.

Commentaire : En choisissant le point fixe pour origine d'un repère orthonormé on peut alors confondre les isométries étudiées avec leur partie linéaire.

5. <u>EXERCICE</u>
1) Déterminer les groupes d'isométries d'une ellipse d'équation réduite $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$.
2)Déterminer les groupes d'isométries d'une hyperbole d'équation réduite $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$.

6. EXERCICE : Isométries d'un ellipsoïde

Dans ce qui suit les vecteurs coordonnées des points de l'espace affine relativement au repère orthonormé de travail sont des éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
Ce dernier est de plus identifié avec l'ensemble des matrices réelles à 1 ligne et 3 colonnes.

On considère une ellipsoide $\mathcal{E}l$ d'équation ${}^tXSX = c$ avec $S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 3 \end{pmatrix}$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ et $0 < c$.

L'objectif de l'exercice est de déterminer $Is(\mathcal{E}l)$.

0) Dessiner l'ellipsoide pour des λ_i deux à deux différents, puis tous égaux, puis enfin avec $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$
1) Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie et point fixe commun à tous les éléments de $Is(\mathcal{E}l)$ (utiliser l'exo précédent).

On identifie alors E avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ à l'aide du repère utilisé. Les isométries cherchées peuvent alors être considérées comme linéaires.

2) Soit f un élément de $Is(E)$ fixant O et $P \in O(\vec{E})$ sa matrice exprimée dans la base du repère.
a) Montrer qu'une forme quadratique s'annullant en tout point de $\mathcal{E}l$ est nulle.
b) Montrer que les points suivants sont équivalents :
(*) $f \in Is(\mathcal{E}l)$
(**) $\forall X \in \mathbb{R}^3, {}^tXSX = c \Leftrightarrow {}^tXS'X = c$ avec S'=${}^tPSP$
(***) ${}^tPSP = S$
3) Soit $P \in O(\vec{E})$. On note $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_3}$ les sous espace propre de S associé aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_3$.
Montrer que P commute avec S si et seulement si $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \forall X \in E_{\lambda_i}$ on a $PX \in E_{\lambda_i}$.
4) Déterminer $Is(\mathcal{E}l)$ dans chacun des cas suivants :
a) si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.
b) si $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$ (Remarque : si $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3$ la situation est la même).

c) si $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

7. EXERCICE On considère un cube C de centre O et T_1, T_2 les deux tétraèdres réguliers inscrit dans C. On note s la symétrie de centre O.
Montrer que $Is(C) = Is(T_1) \times \langle s \rangle$ et en déduire le nombre d'isométries de C

8. EXERCICE (polygônes : faut il prendre pour X le polygône plein, les cotés ou les sommets ?)
On suppose dans cet exercice que X est un convexe compact. on appelle frontière de X les points de X qui n'appartiennent pas à l'intérieur de X.
a) Montrer que X est l'enveloppe convexe de sa frontière $Fr(X)$ (c'est à dire que tout elt de X est barycentre à coefs positifs d'éléments de $Fr(X)$).
b) Montrer que $Is(X) = Is(Fr(X))$ (c'est à dire d'une part que l'image d'un point de la frontière est un point de la frontière et d'autre part que toute isométrie de X est déterminée par sa restriction à $Fr(X)$)

Commentaire : Il revient donc au même d'étudier les isométries du cube "plein" ou du cube vu comme réunion de ses faces.

2)a) On note S (comme "sommets") l'ensemble des points extrémaux de X (ensemble des points M qui ne sont pas barycentre à coefs positifs de points de $X - \{M\}$) et on suppose que X est l'enveloppe convexe de S (ensemble des barycentres à coef positifs ou nuls d'elts de S).
Montrer que $Is(X) \subset Is(S)$.
b)Montrer que l'inclusion précédente est en fait une égalité d'ensembles.

Commentaire : il revient donc au même d'étudier les isométries du cube est les isométries de E préservant les sommets du cube.

3) On Considère le morphisme r du groupe $Is(X)$ dans le groupe $Aut(X)$ des permutations de X.
a) Montrer que si X contient un repère affine de E alors r est une injection.
b) Donner un exemple de partie X pour laquelle r n'est ni une injection , ni une surjection.

9. <u>EXERCICE :</u>
On a traité jusqu'ici uniquement les isométries affines. Qu'en est il des isométries non affines de X ?
En fait il n'y en a pas.
On traite le cas où $dim(E) = 2$ sachant que le cas de la dimension 3 est analogue.
On suppose que X contient assez de points pour fabriquer un repère affine du plan.
Soit $f : X \to X$ une application préservant les distances.

1) Soit (A, B, C) un repère affine de X et d_1, d_2, d_3 trois réels positifs. Montrer qu'il existe au plus un point du plan à distances respectives d_1, d_2, d_3 de A, B, C.
2) Soient A', B', C' trois points de X. En déduire qu'il existe au plus une application $f : X \to X$ conservant la distance et envoyant A, B et C sur A', B' et C' respectivement.
3) Montrer que f est la restriction à X d'une et une seule isométrie affine de E.

commentaire : Si X engendre un sous espace affine D distinct de E on montre de même que f est la restriction d'une et une seule application affine de D bien que cette application puisse éventuellempent s'étendre de plusieur façons en une application affine de E.