PROBLÈME : ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

Toutes les fonctions de ce problème sont à valeurs réelles.

PARTIE PRÉLIMINAIRE

Les résultats de cette partie seront utilisés plusieurs fois dans le problème.

1. Fonction Gamma d'Euler

a. Soit $x \in \left]0, +\infty\right[$, montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}\, t^{x-1}$ est intégrable sur $\left]0, +\infty\right[$.

On pose, pour $x \in \left]0, +\infty\right[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t$.

b. Déterminer, pour $x \in \left]0, +\infty\right[$, une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel non nul n.

2. Fonction zêta de Riemann

On rappelle que la fonction zêta est définie sur $\left]1, +\infty\right[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On connaît $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, on sait que pour p entier pair, $\zeta(p)$ est de la forme $q\,\pi^p$ où q est un rationnel ; il a été démontré que certains $\zeta(p)$ pour p entiers impairs sont irrationnels mais on ne sait pas s'ils le sont tous.
On se propose de rechercher des valeurs approchées de ces réels $\zeta(p)$.

a. On note, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = \zeta(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$.

Prouver que, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$, $R_n(x) \leq \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}$.

b. On fixe l'entier $p \geq 2$ et un réel $\varepsilon > 0$. Indiquer une valeur de n pour laquelle on a $\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \zeta(p) \right| \leq \varepsilon$.

c. Donner, en utilisant la calculatrice, une valeur approchée de $\zeta(7)$ à 10^{-6} près.

PREMIÈRE PARTIE : SUITES DE FONCTIONS

<u>Préliminaire</u> : Dans les questions 3 à 5 suivantes, on n'utilisera pas pour les démonstrations le théorème de convergence dominée, énoncé à la question 6.

3. Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions

Démontrer le théorème suivant que l'on notera **TH 1** :
si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$, alors, la suite de réels $\left(\int_a^b f_n(x)\, \mathrm{d}x \right)$ converge vers le réel $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$.

On commencera par donner un sens à l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ juste en énonçant un théorème.

4. Exemples et contre-exemples

a. Déterminer une suite (f_n) de fonctions continues et affines par morceaux sur le segment $[0,1]$ qui converge simplement mais non uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$ et telle que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ ne converge pas vers le réel $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque : on peut se contenter d'une vision graphique et, dans ce cas, il est inutile d'exprimer $f_n(x)$, mais on attend une justification des deux propriétés demandées.

b. Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[0,1]$, démontrer qu'il est possible que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ sans que la convergence de la suite de fonctions (f_n) ne soit uniforme sur $[0,1]$.

5. Cas d'un intervalle quelconque

a. Montrer à l'aide de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $I=[0,+\infty[$ par

$$f_n(x)=\frac{x^n\,e^{-x}}{n\,!}$$

que le **TH 1** n'est pas vrai si on remplace l'intervalle $[a,b]$ par un intervalle I non borné.

Remarque : on pourra utiliser la formule de Stirling sans la démontrer.

b. Nous allons prouver que le **TH 1** est vrai sur un intervalle borné *I*.

On considère (f_n) une suite de fonctions continues et intégrables sur *I* intervalle borné, qui converge uniformément vers une fonction *f* sur *I*.

i. Justifier l'existence d'un entier naturel p tel que, pour tout réel $x\in I$, $|f(x)|\leq 1+|f_p(x)|$ et en déduire que *f* est intégrable sur *I*.

ii. Montrer que la suite de réels $\left(\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$. On notera $\ell\,(I)$ la longueur de l'intervalle *I*.

6. Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions

On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 2** :

si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I qui converge simplement sur *I* vers une fonction *f* continue par morceaux sur *I* et s'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur *I* telle que, pour tout entier naturel *n* et tout réel $x\in I$: $|f_n(x)|\leq\varphi(x)$ alors, la fonction *f* est intégrable sur *I* et la suite de réels $\left(\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Rappeler pourquoi il est inutile de vérifier, lorsqu'on utilise ce **TH 2**, que les fonctions f_n sont intégrables sur I et justifier que f est intégrable sur I.

b. Exemples

i. Montrer à l'aide d'un exemple simple que ce théorème peut être pratique sur un segment I sur lequel la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction f.

ii. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

DEUXIÈME PARTIE : SÉRIES DE FONCTIONS

7. Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions

Justifier, simplement, à l'aide du **TH 1** le théorème suivant que l'on notera **TH 3** :

si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur le segment $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$, alors, la série de réels $\sum \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x .$$

8. Application : séries trigonométriques et séries de Fourier

On appellera série trigonométrique une série de fonctions du type $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n\geq 1} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

La série de Fourier d'une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ est donc une série trigonométrique.

a. Montrer qu'une série trigonométrique n'est pas toujours la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, utiliser la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ avec le théorème de Parseval que l'on commencera par énoncer.

b. Montrer qu'une série trigonométrique qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ est la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

On utilisera sans démonstration les résultats classiques pour n et p entiers naturels :

$$\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq p \\ \pi & \text{si } n = p \neq 0 \end{cases}$$

et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(px)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$.

9. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 4** :

si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I telle que la série $\sum \int_I |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge, alors f est intégrable sur I, la série $\sum_{n\geq 0} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x .$$

Application : théorème de Hardy

On suppose que $\sum a_n$ est une série de réels absolument convergente.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n\, x^n}{n\,!}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)\, e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ comme la somme d'une série numérique.

10. Cas où les théorèmes TH 3 et TH 4 ne s'appliquent pas

a. Montrer que, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle borné $I = [0, 1[$ (donc les hypothèses du théorème **TH 3** ne sont pas toutes vérifiées).

b. Montrer que, pour la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$ sur $I = [0, 1[$, les hypothèses du théorème **TH 4** ne sont pas toutes vérifiées.

c. Montrer que, néanmoins, $\sum_{n\geq 0} \int_0^1 (-1)^n x^n\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n\right)\mathrm{d}x .$$

11. Théorème de convergence monotone

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.

On suppose que toutes les fonctions f_n sont positives sur I et que la fonction f est intégrable sur I.

On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout $x \in I$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Montrer que la suite de fonctions (S_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée **TH 2**, et en déduire que :

la série $\sum_{n \geq 0} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x$.

12. Application à la physique

a. Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

On détaillera toutes les étapes et on pourra remarquer que, pour $t \in \left]0, +\infty\right[$, on a $\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}$.

Cette intégrale intervient notamment dans la théorie du rayonnement du corps noir.
La loi de Planck donne l'expression de la densité spectrale d'énergie électromagnétique u_λ rayonnée par le corps noir, en fonction de la longueur d'onde par la formule :

$$u_\lambda = \frac{8\,\pi\,h\,c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\,c}{k_B\,\lambda\,T}\right) - 1}$$

où h et k_B sont les constantes de Planck et de Boltzmann, c la célérité de la lumière dans le vide, λ la longueur d'onde et T la température.
Ainsi, la densité volumique totale d'énergie électromagnétique u (rayonnée sur tout le spectre des longueurs d'onde) s'écrit : $u = \int_0^{+\infty} u_\lambda\,\mathrm{d}\lambda$.

Si on note M l'exitance totale d'un corps noir on sait que M et u sont liés par la relation $M = \frac{c}{4} u$.

b. Démontrer la loi de Stefan : $M = \sigma\,T^4$ où $\sigma = \frac{2\,\pi^5 (k_B)^4}{15\,h^3\,c^2}$.

13. Généralisation

a. Exprimer de même pour x réel $x > 1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\Gamma(x)$ et $\zeta(x)$.

b. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$ et une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

Fin de l'énoncé.

Troisième partie : intégrales à paramètres.

14 : Retour sur la fonction Gamma.

a. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra commencer par montrer la continuité sur tout intervalle $[a,b]$ avec $0 < a < b$).
b. Montrer que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner une expression de sa dérivée sous forme intégrale.
c. Etudier la convexité de la fonction Γ.
d. Justifier l'existence d'un réel $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. Préciser les variations de Γ.
e. Donner un équivalent simple de la fonction Γ au voisinage de 0.
f. Etudier les limites de la fonction Γ en 0 et en $+\infty$.
g. Dessiner l'allure du graphe de Γ.

15 : Pour retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss.

a. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente. L'objectif de cette question est de calculer la valeur de cette intégrale, dite intégrale de Gauss.
b. Justifier que l'on définit bien des fonctions f et g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ en posant :

$$f(x) = \Big(\int_0^x e^{-t^2} dt\Big)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

c. Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que $f' + g'$ est nulle sur $\mathbb{R}^+$.
d. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.
e. Etudier la limite de g en $+\infty$.
f. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss.
g. En déduire la valeur de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.