Feuille 1

AI 2012/2013

12 octobre 2012

Au cours de ce problème, on redémontrera le théorème de **Cayley-Hamilton**, et certains résultats sur les polynômes minimaux. Vous êtes donc instamment priés de ne pas utiliser ces résultats !

Notations

1. Dans tout le problème, K désigne un corps commutatif, E un espace vectoriel sur K de dimension finie n supérieure ou égale à 2, $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E, I_E l'élément de $\mathcal{L}(E)$ défini par $I_E(x) = x$, pour tout x dans E, et $\mathcal{H}$ l'ensemble des homothéties de E.

2. Pour un endomorphisme u de E, on note :

   - $u^0 = I_E$ et $u^p = u \circ u^{p-1}$, pour tout entier p supérieur ou égal à 1.
   - $C(u)$, appelé commutant de u, la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ des endormorphismes de E qui commutent avec u.
   - χ_u le polynôme caractéristique de u
   - pour tout polynôme P de $K[X]$, défini par $P(X) := \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k X^k$, $P(u)$ désigne l'endomorphisme de E défini par $P(u) := \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k u^k$.
   - pour tout vecteur x de E, $E_u(x)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par la famille des vecteurs $\{u^p(x); p \in \mathbb{N}\}$.
   - un endomorphisme de E est dit <u>cyclique</u>, s'il existe x dans E, tel que $E_u(x) = E$.

3. Si $\mathcal{A}$ est une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$, on note :

   $$C(\mathcal{A}) := \{v \in \mathcal{L}(E)/v \circ u = u \circ v, \quad \forall u \in \mathcal{A}\}.$$

   Enfin pour une matrice A de l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, on note $C(A) := \{B \in \mathcal{M}_n(K)/A.B = B.A\}$.

On admettra le résultat suivant :
Soit $\mathcal{B}$ une base de E ; pour un endomorphisme u de E, soit $M(u, \mathcal{B})$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
Alors, un endomorphisme v appartient au commutant de u si et seulement si $M(v, \mathcal{B})$ appartient au commutant de $M(u, \mathcal{B})$, et l'application $v \longmapsto M(v, \mathcal{B})$ est un isomorphisme d'algèbre.

Résultat préliminaire

Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in K^n$; on note

$$V(\lambda_1, ..., \lambda_n) := \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & ... & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_2^{n-1} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que $V(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est nul si et seulement si $\exists (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j$ tel que $\lambda_i = \lambda_j$.
(NB : je vous conseille de soigner votre rédaction si vous ne faites pas le calcul de ce déterminant de Vandermonde).

Partie I

1. Soit x un vecteur de E, et u un endomorphisme de E.
   (a) Montrer que $E_u(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, contenant x et stable par u.
   (b) Soit $x \neq 0$; on pose $dim_K E_u(x) := k$.
   Montrer que $k \geq 1$, et que $\{u^i(x); 0 \leq i \leq k-1\}$ est une base de $E_u(x)$.
   (c) Caractériser au moyen de la dimension de $E_u(x)$ les vecteurs propres de u.
2. On suppose que u est un endomorphisme cyclique.
   Soit alors $x_0 \in E$ tel que $\{u^i(x_0); 0 \leq i \leq n-1\}$ soit une base de E.
   (a) Montrer que $\{u^i; 0 \leq i \leq n-1\}$ est une partie libre de $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Soient v et w deux éléments de $C(u)$.
   Montrer que $v = w$ si et seulement si $v(x_0) = w(x_0)$.
   (c) Montrer que $\{u^i; 0 \leq i \leq n-1\}$ est une base de $C(u)$.
   (d) On pose $u^n(x_0) := \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j u^j(x_0)$ où $a_j \in K$, pour $j \in [\![0, n-1]\!]$.
      i. Calculer le polynôme caractéristique χ_u de u à l'aide des coefficients a_j.
      ii. En déduire que $\chi_u(u) = 0$.
3. Dans cette question, u est un endomorphisme quelconque de E.
   (a) Soit F un sous-espace de E, stable par u et soit v l'endomorphisme de F induit par u.
   Montrer que χ_v divise χ_u. En déduire que $Ker(\chi_v(u))$ est inclus dans $Ker(\chi_u(u))$.
   (b) Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer que u induit sur le sous-espace $E_u(x)$ un endomorphisme cyclique de $E_u(x)$.
   En déduire que $\chi_u(u)(x) = 0$.

   (c) Montrer que $\chi_u(u)$ est l'endomorphisme nul.

4. (a) Soit u un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E, dim_K E_u(x) \leq 1$.
   Montrer que u est une homothétie de E.
   (b) *Application* : Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$ satisfaisant la propriété :
   $$\forall x \in E, x \neq 0, \exists f \in \mathcal{A}, \exists \alpha \in K \text{ tel que } Ker(f - \alpha I_E) = K.x.$$
   Montrer que $C(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.
   (c) En déduire que $C(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ dans les deux cas suivants :
      i. $\mathcal{A} = GL(E)$. (Il n'est dit nul part que K n'est pas de caractéristique 2)
      ii. $K = \mathbb{R}; E$ est un espace euclidien, et $\mathcal{A}$ est l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Partie II

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E, $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ les valeurs propres distinctes de u dans K, et $(r_i)_{1\leq i\leq p}$ leur ordre de multiplicité.

1. On suppose que $p = n$. Montrer que u est cyclique.
2. Dans cette question, on suppose u diagonalisable.
   (a) Montrer que $v \in C(u)$ si et seulement si v laisse stable tous les sous-espaces propres de u.
   (b) En déduire que $dim_K C(u) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2$.
   (c) Montrer que $(u - \lambda_1 I_E) \circ (u - \lambda_2 I_E) \circ ... \circ (u - \lambda_p I_E) = 0$.
   En déduire que si $\{I_E, u, ..., u^{n-1}\}$ est une famille libre, u a n valeurs propres dans K deux à deux distinctes.
   (d) Déduire des résultats précédents que les assertions suivantes sont équivalentes :
      i. u est cyclique,
      ii. $\{I_E, u, ..., u^{n-1}\}$ est une famille libre,
      iii. u admet n valeurs propres distinctes dans K,
      iv. $dim_K C(u) = n$.
3. Dans cette question, on suppose u cyclique.
   (a) Montrer, en utilisant une base convenable, que $\forall \lambda \in K$, $rang(u - \lambda I_E) \geq n - 1$.
   (b) En déduire que u est diagonalisable si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes dans K.
4. *Application.*
   Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre k ($k \geq 2$) $A := (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ telles que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:
   $$\sum_{l=1}^{k} a_{i,l} = \sum_{l=1}^{k} a_{l,j}.$$
   On note $\alpha(A)$ la valeur commune des sommes ci-dessus.
   Soit J la matrice de $\mathcal{M}$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

(a) Montrer que $\mathcal{M}$ est le commutant de J, et que α est un élément du dual de $\mathcal{M}$.

(b) Déterminer les ordres de multiplicité des valeurs propres de J. Donner $dim_{\mathbb{R}}\mathcal{M}$.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}$. On pose $\beta(A) = \sum_{i=1}^{k} a_{i,i}$.

Montrer que $\mathcal{M}_0 := \{A \in \mathcal{M}/\alpha(A) = \beta(A)\}$ est un espace vectoriel dont on donnera la dimension.

Partie III

Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'ordre p ($p \geq 2$), i.e $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1. (a) Montrer que pour tout vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, la famille $\{u^i(x); i \in [\![0, p-1]\!]\}$ est une partie libre de E.

   (b) En déduire que p est inférieur ou égal à n, et que u est cyclique si et seulement si $p = n$.

2. *Application* : pour tout entier $k \geq 0$, on désigne par $\mathbb{R}_k[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à k.

   Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ défini (pour $k \geq 1$) par : $\forall P \in \mathbb{R}_k[X]$,

$$\Delta(P)(X) := P(X+1) - P(X).$$

   (a) Déterminer $Ker(\Delta)$. En déduire que $Im(\Delta) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Montrer que Δ est cyclique.

   (b) Soit D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

   Montrer que D est un élément de $C(\Delta)$.

   (c) La question I2c permet de définir des réels $(\alpha_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ tels que

$$D = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \Delta^i,$$

   et ce de façon unique.

   Déterminer ces réels lorsque k vaut 1,2 et 3.

Partie IV

Dans toute cette partie $K := \mathbb{R}$, et $dim_{\mathbb{R}}E = 2$.
<u>A</u>: Soit u un endomorphisme de E satisfaisant

$$u^p = I_E \text{ avec } p > 2 \text{ et } u^q \neq I_E \text{ pour } q \in [\![1, p-1]\!].$$

1. u peut-il être une homothétie ? Montrer que u est cyclique.

2. (a) Montrer que le reste de la division euclidienne du polynôme $X^p - 1$ par le polynôme caractéristique χ_u de u est nul.

(b) En déduire que les racines de χ_u sont de la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, où θ est un élément de l'ensemble

$$\left\{ \frac{2k\pi}{p}; k \in [\![1, p-1]\!]; k \text{ et } p \text{ premiers entre eux} \right\}.$$

3. Soit e_1 un vecteur non nul de E, et soit $e_2 := u(e_1)$.

(a) Montrer que (e_1, e_2) est une base de E, et que la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2cos(\theta) \end{pmatrix},$$

où θ est défini ci-dessus.

(b) Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique unique φ sur E, satisfaisant

$$\begin{cases} \varphi(e_1, e_1) = 1 \\ \varphi(u(X), u(Y)) = \varphi(X, Y) \quad \forall X \in E \quad \forall Y \in E \end{cases}$$

Donner la matrice de φ dans la base (e_1, e_2).

(c) Montrer que φ est un produit scalaire sur E. Quelle est l'interprétation de u dans cette structure euclidienne ?