Introduction et notations

Ce texte d'analyse fonctionnelle a pour objet l'étude de quelques propriétés des séries trigonométriques ; il se conclut par une application à la résolution d'un problème de DIRICHLET par une approche variationnelle, (partie **III**).

Dans tout ce qui suit on note :

- $\mathscr{C}([0,\pi],\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications continues du segment $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$;
- E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications f de $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, continues, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et vérifiant $f(0) = f(\pi) = 0$;
  Pour f appartenant à E on convient de désigner par f' la fonction définie sur $[0,\pi]$ par
  - si en x de $[0,\pi]$ f est dérivable, alors $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en ce point ;
  - si en x de $[0,\pi]$ f n'est pas dérivable, alors $f'(x) = 0$;
- $\ell^2_{\mathbf{R}}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$de nombres réels telles que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ converge ;
  On rappelle que, si $\alpha = (\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ et $\beta = (\beta_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux éléments de $\ell^2_{\mathbf{R}}$, la série de terme général $(\alpha_n\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est absolument convergente. De plus l'application $(\alpha,\beta) \mapsto < \alpha,\beta >= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ est un produit scalaire sur $\ell^2_{\mathbf{R}}$ et $\ell^2_{\mathbf{R}}$ est complet pour la norme associée à ce produit scalaire ;
- pour tout entier $n \geqslant 1$, par e_n l'élément de E défini par $e_n(x) = \sin nx$.

Partie I : Questions préliminaires. Exemples

A. Un lemme de CANTOR

Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de nombres réels. Pour tout x de $\mathbf{R}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, et on suppose que pour tout x réel la suite $(f_n(x))$ converge vers 0. On se propose de montrer que les suites (a_n) et (b_n) ont pour limite 0 en $+\infty$.

1. Montrer que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que, pour tout x de $\mathbf{R}$, $b_n \sin nx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Dans cette question, on propose deux méthodes pour montrer que la suite (b_n) a pour limite 0 en $+\infty$
   (a) *Raisonnement par l'absurde*
   On suppose que la suite (b_n) ne converge pas vers 0.
      i. Montrer qu'il existe un réel strictement positif ε et une sous suite (b_{n_k}) de la suite (b_n) tels que $n_1 > 0$ et que l'on ait, pour tout entier k, $|b_{n_k}| \geqslant \varepsilon$ et $n_{k+1} \geqslant 3n_k$.
      ii. Construire pour tout entier k un intervalle $[a_k, b_k]$ de la forme $a_k = \dfrac{\pi}{6} + p_k\pi$, $b_k = \dfrac{5\pi}{6} + p_k\pi$, avec $p_k \in \mathbf{Z}$, tel que si $J_k = \dfrac{1}{n_k}[a_k, b_k]$ l'on ait, pour tout entier k, $J_{k+1} \subset J_k$. Vérifier que $|\sin n_k x| \geqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout x de J_k.
      iii. Établir que l'intersection $\bigcap\limits_{k\geqslant 1} J_k$ n'est pas vide, et conclure à une contradiction.

(b) *Intervention du calcul intégral*

i. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} (b_n \sin nx)^2 \,\mathrm{d}x$.

ii. Conclure dans le cas où la suite (b_n) est bornée.

iii. Dans le cas général, on pose $b'_n = \inf(1, |b_n|)$. Vérifier que, pour tout x de $\mathbf{R}$, $\quad b'_n \sin nx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclure.

B. L'espace H

1. (a) Soient $\alpha = (\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ un élément de $\ell^2_{\mathbf{R}}$ et x un élément de $[0,\pi]$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{\alpha_n}{n} e_n(x)$ converge absolument (on pourra utiliser l'inégalité $ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$ pour deux nombres réels a et b).

(b) On pose $\theta(\alpha)(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} e_n(x)$. Montrer que l'on définit ainsi une application θ de $\ell^2_{\mathbf{R}}$ dans $\mathscr{C}([0,\pi], \mathbf{R})$.

(c) Établir que θ est linéaire et injective.

Dans toute la suite on notera H l'image de θ, et $\|\cdot\|_H$ la norme définie sur H, pour $f = \theta(\alpha)$, par $\|f\|_H = \sqrt{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2}$. Vérifier que H est complet pour cette norme.

2. Établir l'inclusion $E \subset H$. (On pourra montrer que tout élément f de E est la restriction à $[0,\pi]$ d'une unique fonction $\widetilde{f}$ 2π-périodique et impaire, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, et développer $\widetilde{f}$ en série de FOURIER).

3. Montrer que l'application qui à un couple (f, g) d'éléments de E associe le nombre

$$(f|g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f'(t) g'(t) \,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur E. Vérifier que la norme associée à ce produit scalaire coïncide avec la restriction à E de $\|\cdot\|_H$.

Montrer que E est dense dans H pour la topologie associée à la norme $\|\cdot\|_H$

4. Pour f dans H, on pose $\|f\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[0,\pi]} |f(x)|$.

(a) Prouver l'existence d'une constante k telle que l'on ait l'inégalité, valable pour tout f de H :

$$(*) \qquad \forall f \in H, \quad \|f\|_\infty \leqslant k \|f\|_H.$$

(b) Pour tout élément a de $]0,\pi[$, on désigne par h_a l'élément de E défini en tout x par $h_a(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a} & \text{si } x \leqslant a \\ \dfrac{\pi - x}{\pi - a} & \text{si } x > a \end{cases}$. En appliquant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ au produit scalaire $(f|h_a)$, pour f dans E, montrer que la plus petite valeur de k telle que l'on ait $(*)$ est $\pi/\sqrt{8}$.

5. On se propose de démontrer que si F est une application de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $F(0) = 0$, et si f est un élément de H, alors $F \circ f$ appartient à H.

Soient f un élément de H et (f_n) une suite d'éléments de E convergeant vers f au sens de la norme $\|\cdot\|_H$. On pose $g_n = F \circ f_n$.

(a) Vérifier que la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée.

On note A un réel vérifiant $\|f_n\|_\infty \leqslant A$ pour tout n, puis $M_1 = \sup\limits_{|t|\leqslant A} |F'(t)|$ et $M_2 = \sup\limits_{|t|\leqslant A} |F''(t)|$.

(b) Établir que, pour tous p, q dans $\mathbf{N}$, on a l'inégalité :

$$\|g_p - g_q\|_H \leqslant \left(\frac{\pi}{\sqrt{8}} M_2 \|f_p\|_H + M_1\right) \|f_p - f_q\|_H$$

(c) Conclure.

(d) En déduire que H est une algèbre, *i.e.* que le produit fg de deux éléments f et g de H est un élément de H. (On pourra utiliser la relation $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$).

Partie II : Pseudo-dérivée seconde au sens de SCHWARZ

Si f est une application continue de R dans R, on dit que f admet au point x une dérivée seconde au sens de SCHWARZ si, et seulement si, $\lim\limits_{h\to 0,\, h\neq 0} \dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ existe ; dans ce cas la limite est notée $f^{('')}(x)$.

1. Montrer que si f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, $f^{('')}(x)$ existe en tout x de $\mathbf{R}$, et en donner la valeur.
2. Soit f une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ possédant en tout x de $\mathbf{R}$ une pseudo-dérivée seconde au sens de SCHWARZ nulle.

   (a) Soient a et b des réels tels que $a < b$, ε un réel strictement positif. On pose

   $$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \varepsilon(x-a)(b-x)$$

   Vérifier que la fonction φ est continue et que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Calculer $\varphi^{('')}$.

   Montrer que φ ne peut avoir de maximum strictement positif sur $[a, b]$.

   (b) En déduire que f est affine.

3. Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de réels tels que la série de fonctions de terme général $(a_n \cos nx + b_n \sin nx)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction f continue sur $\mathbf{R}$. On pose alors

   $$F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

   .

   (a) Justifier l'existence de F sur $\mathbf{R}$ et prouver sa continuité.

   (b) Pour x dans $\mathbf{R}$ et $h > 0$ on pose

   $$u(0) = 1, \quad u(x) = \frac{4}{x^2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad \Delta(x,h) = \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}.$$

   Vérifier la relation

   $$\Delta(x,h) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) u(nh).$$

   (c) Si l'on pose $S_0(x) = 0$ et $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ pour $n \geqslant 1$, justifier l'égalité

   $$\Delta(x,h) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [S_n(x) - f(x)]\,[u(nh) - u((n+1)h)]\,.$$

(d) i. En remarquant que $u((n+1)h) - u(nh) = \int_{nh}^{(n+1)h} u'(x)\,\mathrm{d}x$, déduire de ce qui précède que, pour tout réel x, $F^{('')}(x)$ existe et vaut $f(x)$.

ii. Montrer que l'application qui au réel x associe $\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et calculer sa dérivée seconde.

iii. Prouver finalement l'existence de réels α et β tels que pour tout réel x l'on ait

$$F(x) = \alpha x + \beta + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(e) En utilisant ce qui précède, établir que les suites (a_n) et (b_n) sont les coefficients de FOURIER de f, *i.e.* que pour tout n :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Partie III : Application à un problème variationnel

On désigne par E_0 le sous-espace vectoriel de E des applications v de $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifiant $v(0) = v(\pi) = 0$.

On considère une application continue f de $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout x de $[0,\pi]$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

où $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbf{R}$, la série de terme général $(b_n \sin nx)_{n\geqslant 1}$ est convergente, et que sa somme coïncide avec l'unique application $\widetilde{f}$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, impaire, 2π-périodique et prolongeant f.
   Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

2. *Le problème variationnel*
   On désigne par $J \;:\; E_0 \to \mathbf{R}$ la fonctionnelle définie par :
   $$\forall v \in E_0, \quad J(v) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [(v'(x))^2 + (v(x))^2]\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} f(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$
   et on s'intéresse au problème de minimisation suivant :
   $$(P) \quad \text{Trouver } u \in E_0 \text{ tel que, pour tout } v \in E_0,\ J(u) \leqslant J(v).$$
   Établir, pour tout t de $\mathbf{R}$ et tous u, v de E_0, l'identité suivante :
   $$J((1-t)u + tv) + \frac{t(1-t)}{2}\int_0^{\pi} [(v'(x) - u'(x))^2 + (v(x) - u(x))^2]\,\mathrm{d}x = (1-t)J(u) + tJ(v)).$$

3. *Unicité de la solution du problème (P)*
   Déduire de la question précédente que si u_1 et u_2 sont solutions de (P), alors :
   $$\int_0^{\pi} [(u_1'(x) - u_2'(x))^2 + (u_1(x) - u_2(x))^2]\,\mathrm{d}x = 0$$
   et, par suite, $u_1 = u_2$.

4. *Caractérisation des solutions de (P)*

(a) Montrer que pour tous u, v de E_0, l'on a, pour tout réel t :

$$J(u+tv) = J(u) + t\int_0^\pi (u'(x)v'(x) + u(x)v(x) - f(x)v(x))\,\mathrm{d}x + \frac{t^2}{2}\int_0^\pi (v'^2(x) + v^2(x))\,\mathrm{d}x.$$

(b) En déduire que, pour u dans E_0, u est solution de (P) si, et seulement si, u vérifie :

$$(P') \qquad \forall v \in E_0, \quad \int_0^\pi (u'(x)v'(x) + u(x)v(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. *Existence d'une solution de (P)*

(a) Soit u une solution de (P). Déduire de la question précédente que nécessairement, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{b_n}{n^2+1}.$$

(b) Pour tout x de $\mathbf{R}$, on pose $\widetilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2+1}\sin nx$. En écrivant

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}\sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2(n^2+1)}\sin nx$$

montrer que $\widetilde{u}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, 2π-périodique et vérifie :

$$\begin{cases} -\widetilde{u}'' + \widetilde{u} = \widetilde{f} \\ \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(\pi) = 0 \end{cases}$$

(c) En déduire que la restriction u de $\widetilde{u}$ à $[0,\pi]$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,\pi]$ et est solution, sur cet intervalle, du problème de DIRICHLET :

$$(D) \qquad \begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

(d) Montrer que u est solution de (P'), et donc de (P).
