exercice n° 1 : *Limites, continuité, différentiabilité, régularité*

1) Limite de $(x,y) \mapsto \dfrac{\sin(x)^2+\sin(y)^2}{\mathrm{sh}(x)^2+\mathrm{sh}(y)^2}$ en $(0,0)$
2) Limite de $(x,y) \mapsto \dfrac{x^\alpha y^\beta}{y-x^2}$ en $(0,0)$, en discutant selon α et β
3) Limite de $(x,y,z) \mapsto \dfrac{xyz}{x+y+z}$ en $(0,0,0)$
4) Limite de $(x,y,z) \mapsto \dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(2,-2,0)$
5) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Etudier la continuité de :
$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \end{array}$$
6) Montrer que $f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+||x||^2} \end{array}$ est continue sur E, et montrer que $f(E)$ est bornée.
7) $(x,y,z,t) \mapsto \dfrac{x^3+y^3-z^3-t^3}{x^2+y^2-z^2-t^2}$ est-elle prolongeante par continuité en $(0,0,0,0)$, on précisera le domaine de définition.
8) Si $p\in\mathbb{N}$, soit :
$$f_p : (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \mapsto (x+y)^p \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
   a) Condition nécessaire et suffisante pour que f_p se prolonge par continuité en $(0,0)$?
   b) La condition de a) étant remplie, condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit différentiable en $(0,0)$?
9) On pose
$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$
pour x,y réels non tous deux nuls.
La fonction f admet-elle un prolongement continue à $\mathbb{R}^2$? un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$? $\mathcal{C}^2$?
10) Soit :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2-\{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y & \longmapsto & f(x,y)=(x^2-y^2)\ln(x^2+y^2) \end{array}$$
a) Est-il possible de prolonger f par continuité en $(0,0)$?
b) Etablir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ et, sans calculs, établir
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$
c) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
11) Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ définie par
$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2)-f(0)}{x^2+y^2}$$
a) Déterminer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$. On prolonge F par continuité en $(0,0)$ et on suppose de surcroît f de classe $\mathcal{C}^2$.
b) Justifier que F est différentiable en $(0,0)$ et y préciser sa différentielle.
c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

---

exercice n° 2 : *Calcul différentiel*

1) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On dit que f est homogène de degré $\alpha\in\mathbb{R}$ si, et seulement si,
$$\forall t>0, \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y)$$
a) Montrer que
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\alpha f$$
b) Etablir la réciproque.
2) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$
Montrer la constance de l'application suivante
$$\varphi : r\mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$
3) Soient $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$
et $g(r,t)=f(r\cos t, r\sin t)$.
a) Trouver une relation liant
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

b) Montrer que

$$\varphi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $(r\varphi'(r))' = 0$

c) Conclure que φ est constante.

4) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 < R^2$, on pose

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+iy)^n$$

Etablir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

---

exercice n° 3 : *Recherches d'extrema*

1) Déterminer les extrema locaux et globaux de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

2) Extrema locaux et globaux de

$$f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$$

3) Soit $a > 0$. Montrer que

$$f : (x,y) \mapsto x + y + \frac{a}{xy}$$

admet un minimum strict sur $(\mathbb{R}^{+\star})^2$

4) Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ et $x + y \leqslant 1$.

a) Montrer que $\mathcal{D}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

b) Soient $a > 0, b > 0, c > 0$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^a y^b (1-x-y)^c$$

Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}$.

c) Déterminer

$$\sup_{(x,y)\in\mathcal{D}} f(x,y)$$

---

exercice n° 4 : *EDP*

1) Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \text{ via } \begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$$

2) En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

3) On note U l'ensemble des (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et $E = \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on dit que f est homogène de degré α si $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ pour tous $t \in \mathbb{R}^{+\star}$, $(x,y) \in U$. On pose :

$$\forall f \in E, \forall (x,y) \in U, \Phi(f)(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

a) Déterminer $\ker \Phi$.

b) Soit $f \in E$. Montrer que f est homogène de degré α si, et seulement si, $\Phi(f) = \alpha f$.

c) Résoudre l'équation d'inconnue $f \in E$,
$\Phi(f) = h$, h étant la fonction qui à (x,y) associe $(x^2+y^2)^{3/2} xy$.

Une grande partie de ces exercices, pour beaucoup de grand classiques, sont extraits de l'excellent site :
http ://mp.cpgedupuydelome.fr
On peut y trouver tous les corrigés.